

N^o D'ORDRE :

31

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

AUGUSTO J. DURELLI

Ingénieur-Civil de l'Université de Buenos-Ayres

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU BÉTON TRAITÉ. —
ESSAI PHOTOÉLASTICIMÉTRIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1936, devant la Commission d'Examen

MM. BÉGHIN..... *Président*

VILLEY..... } *Examineurs*
PÈRES..... }

1936

Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

AUGUSTO J. DURELLI

Ingénieur-Civil de l'Université de Buenos-Ayres

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU BÉTON TRAITÉ. —
ESSAI PHOTOÉLASTICIMÉTRIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1936, devant la Commission d'Examen

MM. BÉGHIN.....	<i>Président</i>
VILLEY.....	} <i>Examineurs</i>
PÉRÈS.....	

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

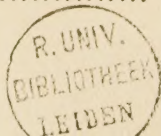
Doyen honoraire M. MOLLIARD.
Doyen C. MAURAIN, *Professeur* Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires...</i>	{	H. LE CHATELIER.	Léon BRILLOUIN.	AUGER.
		H. LEBESQUE.	GOURSAT.	BLAISE.
		A. FERNBACH.	WALLERANT.	DANGEARD.
		A. LEDUC.	GUILLET.	JANET.
		Émile PICARD.	PÉCHARD.	LESPIEAU.
		Rémy PERRIER.	FREUNDLER.	MARCHIS.
				VESSIOT.

PROFESSEURS

G. BERTRAND.....	T	Chimie biologique.	M. JAVILLIER.....	Chimie biologique.
M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	L. JOLEAUD.....	Paléontologie
			ROBERT-LÉVY.....	Zoologie.
G. URBAIN.....	T	Chimie générale.	F. PICARD.....	Zoologie(Évolution des êtres organisés).
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	Henri VILLAT.....	T Mécanique des fluides et applications.
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.	Ch. JACOB.....	T Géologie.
H. ABRAHAM.....	T	Physique.	P. PASCAL.....	T Chimie minérale.
E. CARTAN.....	T	Géométrie supérieure.	M. FRÉCHET.....	T Calcul différentiel et calcul intégral.
M. MOLLIARD.....	T	Physiologie végétale.	E. ESCLANGON.....	T Astronomie.
L. LAPICQUE.....	T	Physiologie générale.	M ^{me} RAMART-LUCAS	T Chimie organique.
A. COTTON.....	T	Recherches physiques.	H. BÉGHIN.....	T Mécanique physique et expérimentale.
J. DRACH.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	FOCH.....	Mécanique expérimentale des fluides.
Charles FABRY.....	T	Enseignement de Physique.	PAUTHENIER.....	Physique (P. C. B.).
Charles PÉREZ.....	T	Zoologie.	De BROGLIE.....	T Théories physiques.
Léon BERTRAND...	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	CHRÉTIEN.....	Optique appliquée.
P. PORTIER.....	T	Physiologie comparée.	P. JOB.....	Chimie générale.
E. RABAUD.....	T	Biologie expériment.	LABROUSTE.....	Physique du Globe.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.	PRENANT.....	Zoologie.
Paul MONTEL.....	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	VILLEY.....	Mécanique physique et expérimentale.
P. WINTREBERT...	T	Anatomie et histologie comparées.	BOHN.....	Zoologie (P. C. B.).
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.	COMBES.....	Botanique (P. C. B.).
O. DUBOSCQ.....	T	Biologie maritime.	GARNIER.....	T Mathématiques générales.
G. JULIA.....	T	Mécanique analytique et mécan. céleste.	PÉRÈS.....	Mécanique théorique des fluides.
C. MAUGUIN.....	T	Minéralogie.	HACKSPILL.....	Chimie (P. C. B.).
A. MICHEL-LÉVY...	T	Pétrographie.	LAUGIER.....	Physiologie générale.
H. BÉNARD.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	TOUSSAINT.....	Technique Aéronaut.
A. DENJOY.....	T	Application de l'analyse à la géométrie.	M. CURIE.....	Physique (P. C. B.).
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et géologie dynamique.	G. RIBAUD.....	T Hautes températures.
Eugène BLOCH.....	T	Physique théorique et physique céleste.	CHAZY.....	T Mécanique rationnelle.
G. BRUHAT.....		Physique.	GAULT.....	Chimie (P. C. B.).
E. DARMOIS.....		Physique.	CROZE.....	Recherches physiques
A. DEBIERNE.....	T	Physique générale et radioactivité.	DUPONT.....	T Théories chimiques.
A. DUFOUR.....	T	Physique (P. C. B.).	LANQUINE.....	Géologie.
L. DUNOYER.....		Optique appliquée.	VALIRON.....	Mathématiques génér.
A. GUILLIERMOND..	T	Botanique.	BARRABÉ.....	Géologie structurale et géologie appliquée.
			MILLOT.....	Zoologie (P. C. B.).
			F. PERRIN.....	Théories physiques.
			VAVON.....	Chimie organique.
			G. DARMOIS.....	Calcul des probabilités et Physique mathématique.

Secrétaire A. PACAUD.
Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.



AVANT-PROPOS

Les études consignées dans ce Mémoire sont le résultat des travaux que j'ai effectués pendant mon stage de deux ans au Laboratoire de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. Ils comprennent deux parties bien distinctes. La première, théorique, se rapporte directement et exclusivement au « béton traité » ; la deuxième, expérimentale, comprend des essais photoélasticimétriques et envisage des cas présentés par la première.

Dans cette partie photoélasticimétrique, au lieu de ne donner que les résultats des expériences réalisées, j'ai expliqué aussi les méthodes employées, j'ai insisté sur certains détails de leurs bases théoriques et sur les difficultés qui peuvent se présenter, en profitant de l'occasion pour revenir sur certains aspects d'une méthode de calcul qui devient de plus en plus importante par ses applications techniques.

Pendant toute la durée de mon stage dans la section photoélasticimétrique du Laboratoire de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, j'ai reçu de son directeur, M. l'Ingénieur Dr V. TESAR les plus précieux conseils et les indications les plus utiles, le tout avec une amabilité et une connaissance si profonde de la question que la reconnaissance que je lui en ai ne saurait être passée sous silence.

SOMMAIRE

I. — LA PIÈCE EN BÉTON TRAITÉ

Antécédents. — Le « béton traité » (1) est, en essence, un béton soumis à des précontraintes artificielles, c'est-à-dire, à des contraintes antérieures à la mise en action des charges que la pièce est destinée à supporter, et dont le signe est contraire à celui des contraintes produites par ces charges. Etant donné que le béton travaille mal à la traction, ces précontraintes se limiteront pratiquement à soumettre à une compression les points qui vont travailler à la traction. Cette compression préalable doit être d'une intensité telle que son effet ne soit pas annulé par le retrait que subit le béton. Les précontraintes sont transmises par des tiges de fer, les mêmes qui constituent les armatures normales des pièces en béton armé. Le béton traité permet en outre l'utilisation des fers à très haute limite élastique et des bétons à très haute résistance que la nature de l'association béton-fer dans le béton armé ordinaire ne permet pas d'utiliser.

Apport de ce travail. — Les tiges de fer pour les pièces qui travaillent à la flexion ont une grande excentricité ; excentricité exigée dans le béton armé par une meilleure utilisation du matériau. Etant donnée cette excentricité les précontraintes souvent sont vite limitées par la contrainte admissible du béton à la traction. Pour parer à cet inconvénient je propose, pour certains cas, d'armer doublement la pièce, c'est-à-dire, de placer une armature près du bord comprimé et une autre près du bord tendu, transmettant l'une et l'autre des efforts préalables.

Dans ce travail j'étudie de façon détaillée et rationnelle le rapport m des deux forces qui agissent sur ces armatures et les conditions qui limitent la plus grande de ces forces de précontrainte P , en fonction des limites admissibles de résistance des matériaux : béton et fer. J'étudie après l'avantage qu'il peut y avoir à faire travailler le fer proche du bord de compression (compression sous la charge à résister), à un taux de fatigue inférieur à l'admissible. J'introduis alors la notion m_1 rapport des sections des deux armatures et j'étudie les conditions qui limitent sa valeur en fonction de P et de la résistance des matériaux. Je cherche finalement la valeur la plus économique de m et de m_1 pour chaque moment fléchissant à supporter.

Je donne aussi dans ce travail un cas particulier. On y trouvera des tableaux numériques et des graphiques, la généralisation de leurs valeurs et l'étude des effets des efforts tranchants.

(1) Cette désignation a été proposée par M. FREYSSINET, l'inventeur de ce nouveau procédé de construction.

II. — ESSAI PHOTOÉLASTICIMÉTRIQUE

But. — Connaître avec plus d'exactitude l'intensité et la direction des contraintes dans la pièce en béton traité. Application plus importante : résistance optima aux effets des efforts tranchants.

Antécédents. — Après le rappel de quelques notions générales je décris les différentes parties de la méthode photoélasticimétrique et tout spécialement la méthode Tardy pour la mesure de la biréfringence et celle employée par Tesar pour l'intégration graphique.

Apport de ce travail. — Description de l'essai du modèle. Résultats obtenus.

ZUSAMMENFASSUNG

I. — DAS « VORBEHANDELTE BETONSTÜCK »

Die bisher bekannten Tatsachen. — Der « vorbehandelte Beton » (« Beton traité ») ist im Grunde genommen ein Beton der einer vorherigen Spannung unterworfen wurde. Diese vorherige Spannung wird durch Eisenträger übertragen. Im allgemeinen sind es dieselben normalen Armierungen wie in dem gewöhnlichen Eisenbeton.

Die Neuerungen auf Grund dieser Arbeit. — Die vorherige Spannung ist oft bald von der Spannung begrenzt die für die Zugbeanspruchung des Betons zulässig ist. Dies hat seinen Grund in der bedeutenden exzentrischen Lage der Eisenträger. Um diesen Nachteil zu vermeiden, kann man das Stück doppelt armieren. Ich studiere genau das Verhältnis m dieser zwei Kräfte die auf jede einzelne der zwei Armaturen wirken, und die Bedingungen die die grösste dieser Kräfte der vorherigen Spannung P_1 , in Funktion der zulässigen Materialwiderstandsgrenzen limitieren : Eisen und Beton. Ich führe m_1 ein, das Verhältnis zweier Armierungen. Dann untersuche ich die Bedingungen, die seinen Wert in Funktion von P und der Materialwiderstände begrenzen. Ich suche den *oekonomischsten* Wert von m und m_1 für jedes Biegemoment. Ich habe einen Spezialfall untersucht. Ich habe die Zahlentafeln und die graphischen Bilder gegeben, und dann die Zahlenwerte und die graphischen Werte verallgemeinert. Die Scherkräfte sind untersucht.

II. — PHOTOELASTIZIMETRISCHER VERSUCH

Zweck. — Die Bestimmung der Spannungsgrösse und-richtung mit grösstmöglicher Genauigkeit. Wichtigere Anwendung : bestmöglicher Widerstand gegenüber den Wirkungen der Scherkräfte.

Nach einem Rappel einiger allgemeiner Grundbegriffe, habe ich die verschiedenen Abschnitte der photoelastizimetrischen Methode beschrieben und ganz besonders die Methode Tardy zu Messung der Doppelbrechung und diejenige von Tesar die für die graphische Integration angewendet wurde, beschrieben.

Beschreibung eines Versuchs mit dem verwendeten Modell.

SUMMARY

I. — THE « TRAITÉ » CONCRETE WORK (1)

What is « traité » concrete. — The « traité » concrete is in its essential features a concrete which has been tried by means of « forestresses ». These « forestresses » are transmitted by means of iron bars, generally the same as the ones normally used for ordinary reinforced concrete.

The contribution realised by that study. — The « forestresses » are often soon stopped by the assumed stress of the reinforced concrete to the tensile stress, because of the great excentricism of the iron bars. In order to strike down that inconveniency one can reinforce twice more the work. One studies in a very complete way the report m between the two forces of « forestress » which prevail upon those reinforcements and the conditions which limit the greater one P in relation to the assumed limits of the strength of the materials : concrete and iron. Then the report m_1 between the cross-section of the two reinforcements is considered and the conditions which limit its value in relation to P and to the strength of the materials, are studied. The value most profitable of m and m_1 , for every bending moment to resist to, is got out.

One works on a special case. Lists of numbers and graphics are given. Generalisation of the values of the lists and graphics. Study of shearing forces.

II. — PHOTOELASTICIMETRIC TEST

Aim. — To know more exactly the intensity and the direction of the stresses. Application more important : optima resistance to the effects of the shearing forces.

After some general notions having been remembered, the different parts of the photoelastizimetric method are described and specially the Tardy method for measurements of the double refraction and of the one used by Tesar for the graphic integration.

Description of the test on the reduced model.

(1) This name has been proposed by M. FREYSSINET the inventor of this new proceeding.

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS EMPLOYÉES

DANS LA PREMIÈRE PARTIE

La pièce étudiée est une *pièce prismatique* en béton, à section rectangulaire.

Elle est *doublément armée*. Les armatures, soumises à des tractions préalables, transmettent au béton des *efforts longitudinaux*.

Ces efforts produisent des contraintes de signe contraire de celles produites par les *charges transversales* ou charges que la pièce est destinée à supporter.

Les contraintes produites par les efforts longitudinaux sont appelées *précontraintes*.

Les *tractions nelles* auxquelles sont soumises les tiges de fer sont égales aux tractions initiales, moins le raccourcissement du béton par charge et retrait et moins les pertes dues aux supports qui maintiennent les aciers tendus pendant la prise du béton.

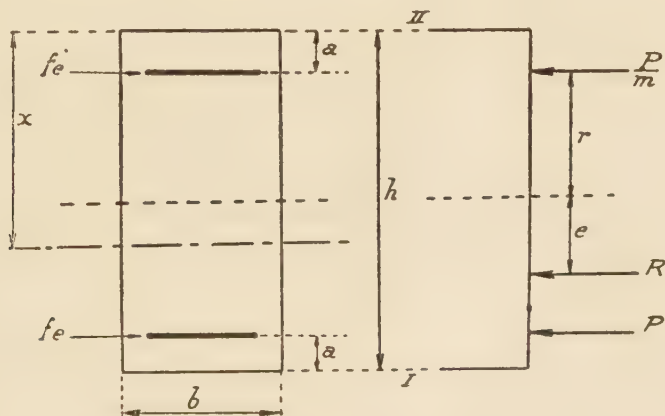


Fig. 1.

- h hauteur de la pièce.
- b largeur de la pièce.
- a distance du centre de gravité des fers au bord.

x	distance du bord où la contrainte produite par la force transversale est une compression, à l'axe neutre.
f_e	section du fer, placé dans la zone où la contrainte produite par la force transversale est une traction (et la précontrainte une compression).
$f_{e'}$	section du fer placé dans la zone où la contrainte produite par la force transversale est une compression
F_e	$f_e + f_{e'}$.
m_1	$\frac{f_e}{f_{e'}}$.
P	force longitudinale qui agit sur f_e , après le raccourcissement du béton sous la charge, le retrait et les pertes dues aux supports de l'acier.
m	rapport entre les forces longitudinales qui produisent des précontraintes et agissent respectivement sur f_e et $f_{e'}$.
R	$P + \frac{P}{m}$: force totale de précontrainte.
e	excentricité de R .
I	bord où la contrainte produite par la force transversale est une traction, et la précontrainte, une compression.
II	bord où la contrainte produite par la force transversale est une compression.
$\mathfrak{M}$	Moment fléchissant produit par la force transversale, que la pièce est destinée à supporter.
σ_I^l	contrainte produite par la force longitudinale, ou précontrainte, nette, sur le bord I .
σ_{II}^l	précontrainte nette sur le bord II .
σ_e^l	précontrainte nette sur f_e .
$\sigma_{e'}^l$	précontrainte nette sur $f_{e'}$.
σ_I^t	contrainte produite par la force transversale sur le bord I .
σ_{II}^t	contrainte produite par la force transversale sur le bord II .
σ_e^t	contrainte produite par la force transversale sur f_e .
$\sigma_{e'}^t$	contrainte produite par la force transversale sur $f_{e'}$.
σ_I	contrainte totale, produite par P et $\mathfrak{M}$, sur le bord I .
σ_{II}	<i>id.</i> , sur le bord II .
σ_e	<i>id.</i> , sur f_e .
$\sigma_{e'}$	<i>id.</i> , sur $f_{e'}$.
J	moment d'inertie de la section homogénéisée de la pièce par rapport à l'axe neutre.
S	prix de la pièce par mètre de longueur.
ε	$\frac{h}{e}$.
σ'_{ad}	contrainte admissible du béton à la traction.
σ_{ad}	contrainte admissible du béton à la compression.
σ_{ead}	contrainte admissible du fer (limite d'élasticité).

r	distance de l'axe des fers à l'axe géométrique de la section de béton.
n	valeur pratique du rapport moyen entre les modules d'élasticité du fer et du béton.
σ_e^λ	taux de la précontrainte à laquelle est soumise f_e , inférieur au maximum possible σ_e^l .
S_v	moment statique de la partie d'une section, partie située au delà de la fibre qui est à une distance v de l'axe neutre, par rapport à cet axe neutre.
Q	Effort tranchant.
T	contrainte tangentielle.

Contraintes : ce sont les charges unitaires, ou quotient de la charge par la surface sur laquelle cette charge agit.

Signe $+$: est réservé à la compression.

Signe $-$: *id.*, à la traction.

DANS LA DEUXIÈME PARTIE

a	amplitude de l'onde lumineuse.
b	biréfringence : $b = \frac{\psi}{2\pi}$.
e	épaisseur géométrique du corps traversé par la lumière.
e_0	épaisseur optique : $e_0 = ei_x (i_x = i_1 ; i_x = i_2)$.
i	indice de réfraction de la matière du modèle non chargé.
i_1, i_2	indices de réfraction pour les directions privilégiées.
I	intensité lumineuse : $I = \frac{1}{2}\rho Va^2$.
k	quantité constante.
t	instant considéré dans l'onde lumineuse.
T	période de l'onde lumineuse.
V	vitesse de propagation.
v	vitesse de l'oscillation lumineuse : $v = a \cos \omega t$.
Δ	différence de marche des rayons dédoublés, exprimée dans la même unité de longueur que λ et e .
λ	longueur d'onde de la vibration rectiligne monochromatique.
ψ	différence de marche des rayons dédoublés exprimée en radians, ou différence de phase.
δ	la moitié de cette quantité.
σ_1, σ_2	les contraintes principales.
ρ	masse spécifique de l'éther.
α	angle de la direction des contraintes principales avec l'origine des angles.
θ	angle de l'analyseur avec l'origine des angles.
ω	fréquence : $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
r	rayon de courbure des isostatiques.

ds	longueur de l'élément d'isostatique.
I_0	isostatique de la famille 1.
II_0	isostatique de la famille 2.
φ_0	angle de la tangente à l'isostatique, avec l'origine des angles. Sert à désigner les isoclines, ou lignes pour les points desquelles cet angle est constant.
Δ_s	segment de tangente à l'isostatique normale à celle le long de laquelle on fait l'intégration.
Δ_φ^r	variation de l'angle des isoclines, mesurée en radians.
Δ_φ^g	<i>id.</i> , mesurée en grades centésimaux.
$d\nu$	segment de tangente à l'isostatique le long de laquelle on intègre.

PREMIÈRE PARTIE

LA PIÈCE EN BÉTON TRAITÉ

I

GÉNÉRALITÉS SUR LE « BÉTON TRAITÉ » OBJET DE L'ÉTUDE PRÉSENTE

Il est évident que si un matériau peut travailler dans de bonnes conditions, soit à la compression, soit à la traction, jusqu'à une limite A, il pourra augmenter son taux de travail jusqu'à la limite $C = A + B$, s'il a été soumis préalablement à une tension B de signe contraire à celle de A. Le matériau doit tout d'abord annuler la contrainte préalable, de signe contraire, puis épuiser le taux normal admissible.

Depuis longtemps, on cherche à augmenter la résistance des pièces en créant en elles des contraintes de signes contraires de celles qui les sollicitent. Pour le fer et pour le bois, on est parvenu dans plusieurs cas à l'obtenir, au moyen de différents artifices. Pour le béton, jusqu'à il y a quelques années, les essais avaient échoué.

Cet échec dans les efforts pour « précontraindre » le béton est attribuable à l'imparfaite connaissance des phénomènes du retrait que l'on avait à l'époque.

La « précontrainte » est obtenue par une mise en traction préalable des aciers, lesquels une fois lâchés, compriment le béton exactement dans la zone qui est destinée à travailler à la traction. On dispose ainsi dans ces fibres, d'une contrainte admissible égale à la somme de la contrainte admissible à la traction et de la compression obtenue par la mise en traction préalable des aciers. Mais ce « surplus » disparaissait très vite et bientôt ces bétons étaient dans les mêmes conditions que

les bétons habituels. La cause provenait de la déformation lente du béton sous charge. Un retrait du béton annulait pratiquement la traction préalable de l'acier (1).

C'est M. Freyssinet qui, étudiant en détail le phénomène et élaborant une théorie qui puisse expliquer des contradictions apparentes, est finalement arrivé à réaliser pratiquement des pièces dans lesquelles existent des précontraintes à l'état permanent, pièces qui voient ainsi augmenter leur résistance d'une façon extraordinaire.

Il a établi d'une façon définitive que si les déformations totales des bétons (effet combiné de la tension initiale et des variations hygrométriques) sont bien plus grandes que celles qui étaient supposées autrefois, elles sont cependant limitées. Les lois des raccourcissements sous charge sont représentées par des courbes à asymptotes parallèles à l'axe des temps. Par conséquent, si on donne aux aciers un allongement tel que le raccourcissement maximum du béton ne soit qu'une fraction médiocre de cet allongement on obtient des précontraintes permanentes.

Pour les bétons ordinaires les raccourcissements peuvent dépasser 3 millièmes, ce qui implique des chutes de tension des aciers de plus de 60 kilogrammes par millimètre carré. M. Freyssinet utilise des tensions initiales pour les aciers d'environ 90 kilogrammes par millimètre carré.

L'avantage de la nouvelle méthode qualifiée par M. Freyssinet de « révolutionnaire », ne réside pas seulement dans le fait de pouvoir disposer d'une marge plus grande pour les contraintes admissibles. Il y a surtout une utilisation possible de matériaux de haute résistance.

On fabrique maintenant des aciers dont la limite élastique arrive à 160 kg/mm², et dont le prix de revient est du même ordre de grandeur que celui de l'acier à 24 kg/mm². Mais, dans le béton armé ordinaire, on ne peut utiliser des fers à limite élastique très au-dessus de 24 kg/mm² parce que les limites d'allongements tolérées par le béton correspondent à peu près aux fatigues usuelles des aciers doux.

L'amélioration de la compacité des bétons permet d'accroître leur résistance à la compression jusqu'à égaler à peu de chose près celle des roches en masse, dont les fragments forment les agrégats. Mais, en même temps, la valeur $n = \frac{E_a}{E_b}$ se trouve abaissée ce qui relève la

(1) *Sur la cause des échecs des premières tentatives*, voir : E. FREYSSINET : Edition Travaux de Science et Industrie, juin 1935, p. 200 ou, *Une Révolution dans les Techniques du Béton*, p. 65.

fibre neutre et accroît la fatigue de compression des pièces fléchies ; la résistance à la traction n'augmente presque pas et finalement la déformabilité plastique diminue beaucoup ce qui empêche une bonne adaptation (1).

Une bonne utilisation des matériaux à haute résistance est donc subordonnée : pour l'acier, au maintien des allongements du béton à l'intérieur de leurs limites pratiques usuelles ; pour le béton, au maintien des contraintes totales de traction au-dessous *d'une limite largement inférieure* à la contrainte de rupture par traction des bétons.

Cette double condition peut être satisfaite en utilisant l'acier, non pour supporter les tractions, mais pour créer dans le béton des contraintes permanentes de sens inverse de celles qui sont développées par les charges.

« Ce résultat peut être obtenu en soumettant l'acier à une traction avant de couler le béton. Pour cela, on saisit les armatures près de leurs extrémités par deux ancrages provisoires, grâce auxquels on les tend à un taux connu par des vérins prenant appui sur organes de butée. On attend un durcissement du béton, suffisant pour réaliser l'ancrage des extrémités de l'armature, puis on supprime l'action des vérins. L'armature tendant à se raccourcir impose au béton une compression égale à sa traction. Un autre procédé consiste à créer une traction dans des tirants en prenant appui sur du béton déjà durci » (2).

M. Freyssinet exprime ainsi ses conclusions sur les conditions nécessaires pour obtenir des résultats permanents, réguliers et industriellement utilisables :

« 1^o Employer des métaux à limite élastique très élevée ; 2^o les soumettre à des tensions initiales très fortes, largement supérieures à 50 kilogrammes par millimètre carré ; 3^o les associer à des bétons de déformabilité très faible, constante et bien connue et qui de surplus offrent l'avantage de résistances très élevées et régulières » (3).

Il y aura donc une perte dans la traction des fers, due au retrait du béton, mais qui sera connue par l'expérience et qui sera largement inférieure à la traction elle-même.

Quand les pièces sont destinées à supporter des moments fléchissants produits par des efforts alternés, elles doivent être doublement armées

(1) E. FREYSSINET. *Une Révolution dans les Techniques du Béton*, p. 64, Librairie de l'Enseignement Technique, Paris.

(2) *Id.*, p. 64.

(3) E. FREYSSINET. *Science et Industrie*, janvier 1933, p. 12.

pour résister à des flexions dans deux sens contraires. Si les flexions dans les deux sens sont d'égale importance, comme c'est le cas général (les poteaux par exemple), les deux armatures sont égales et la précontrainte qu'elles vont transmettre à la pièce sera une compression uniformément répartie sur toute la section.

S'il s'agit des pièces destinées à supporter une flexion de sens constant (les poutres ordinaires, par exemple), il suffit pour résister à ce moment, d'une seule armature, placée dans la zone qui travaillera à la traction. Dans ce cas, la précontrainte transmise par la tige de fer sera une compression excentrée.

Il est clair que, *a priori*, il y a avantage à obtenir les plus grandes précontraintes possibles, puisque cela permettra de disposer d'une grande marge pour les contraintes admissibles.

Cependant, on ne peut pas soumettre ces pièces (destinées à supporter une flexion de sens constant), étant donnée l'excentricité très grande des tiges d'acier, à une grande compression préalable du fait que l'on risque de dépasser dans le bord opposé la limite admissible à la traction. (Cet effet est confirmé par l'essai photoélasticimétrique qui fait l'objet de la deuxième partie de ce travail.)

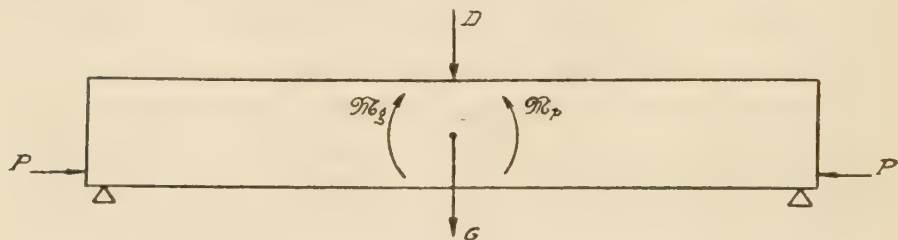


Fig. 2.

Pour éviter cet inconvénient, dans les poutres et hourdis pour lesquels le poids propre intervient dans la même direction et dans le même sens que la charge, on profite de ce poids pour annuler les tensions dangereuses de traction. Par un artifice de construction, la tension préalable peut intervenir en même temps que le poids propre et elle sert à l'annuler, de telle façon que ni le poids propre ni la pré-tension, ne donnent lieu à des contraintes au-dessus de l'admissible. On pourrait arriver à fabriquer ainsi des poutres ayant un énorme poids propre, dans lesquelles celui-ci n'interviendrait pratiquement pas, puisqu'il existerait une contrainte interne exactement opposée (ou supérieure) (fig. 2).

Mais il y a des cas dans lesquels la charge à supporter est variable de zéro à un maximum, et le poids propre intervient dans une direction différente de celle de cette charge, ou dans la même direction, mais avec sens opposé. Dans ces cas, on ne peut pas profiter du poids propre, ni de la charge, pour éviter les tensions dangereuses de traction auxquelles correspond une compression préalable très grande (quoique inférieure à celle qui produirait dans le bord le plus proche d'elle une contrainte de compression égale à l'admissible). On se trouverait ainsi limité à une très petite contrainte de compression, ayant épuisé la résistance admissible à la traction.

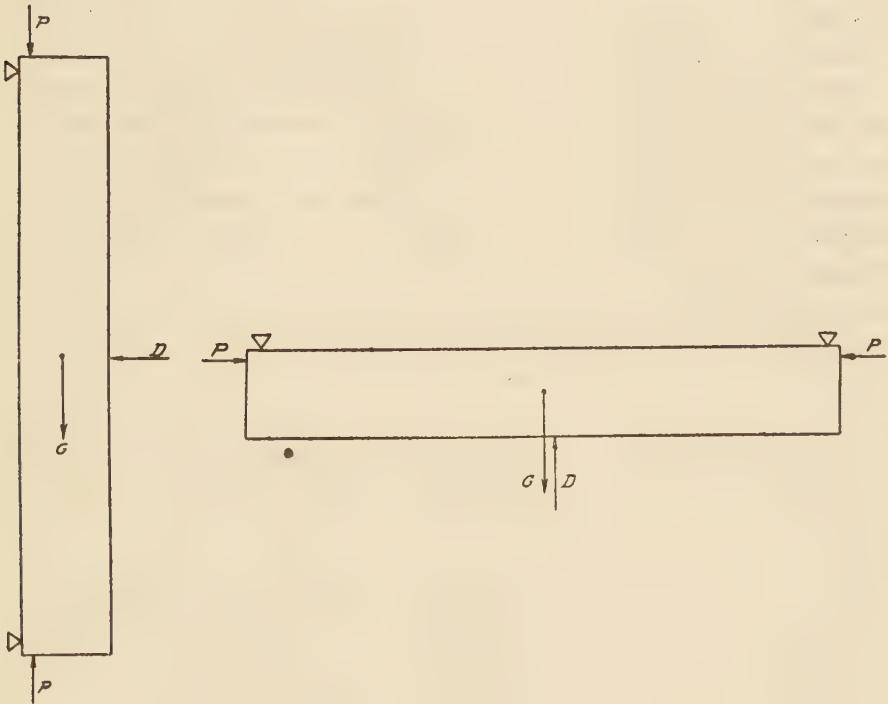


Fig. 3.

Ces cas peuvent se présenter dans les fondations sur poutres et dalles : pour les murs, dalles et poutres destinés à la retenue des eaux ; pour le fond des bateaux en béton armé ; pour les murs de soutènement des terres, les silos, etc. (fig. 3)

Le même cas se présenterait toutes les fois où il s'agirait de fabriquer les pièces en usine et de les transporter, puisque dans ce cas la pièce devrait être appuyée sur toute sa longueur, et le poids propre ne pourrait pas intervenir.

Dans tous ces cas, pour pouvoir porter au maximum possible les précontraintes, on peut avoir recours à un autre expédient : placer aussi des armatures dans la partie de la pièce proche du bord comprimé. Ces armatures qui seront soumises, elles aussi, à une traction préalable, empêcheront le bord près duquel elles se trouvent, de dépasser le taux admissible à la traction.

Ce travail a pour but d'étudier l'effet produit par l'existence de cette armature, et les conséquences apportées par la variation des valeurs m et m_1 , rapports respectivement entre les forces de traction qui agissent sur les deux armatures, et entre leurs surfaces.

Dans la section de la pièce, il y aura aussi des armatures secondaires transversales et des armatures longitudinales centrales, dont le but sera respectivement de résister aux cisaillements, et d'uniformiser le retrait, qui se trouve changé par la seule présence des armatures. La section de ces armatures centrales sera généralement assez petite par rapport à la section des armatures qui sont proches des bords et leurs distances à l'axe neutre sont de même relativement petites, de telle façon que le moment résistant de la pièce ne sera pas sensiblement changé. Dans tous les calculs qui vont suivre, pour simplifier les expressions je vais négliger l'existence des armatures centrales.

J'ai choisi comme type, pour les considérations qui vont suivre, la section la plus simple, celle de forme rectangulaire de dimensions b et h . Aussi pourront-elles s'appliquer aux dalles ou plaques en faisant b égal à l'unité de largeur.

Cette étude ne perd pas de vue le but pratique de trouver la solution la plus économique pour chaque charge différente à supporter.

Je néglige toutefois les détails techniques de réalisation. Plusieurs de ces détails sont décrits dans les ouvrages de M. Freyssinet, d'autres devront être étudiés pour chaque cas particulier.

II

EQUATIONS QUI DONNENT LA VALEUR MAXIMA DE P COMPATIBLE AVEC LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

La résistance effective de la pièce aux charges qu'elle est destinée à supporter est en rapport direct avec l'intensité de la précontrainte. Donc, comme il a été dit plus haut, il y a *a priori* tout intérêt à obtenir la plus grande précontrainte possible.

L'intensité de ces précontraintes est cependant limitée par les résistances admissibles du béton à la compression et à la traction et par celle de l'acier à la traction.

Il est clair également que la valeur maxima possible de P sera fonction aussi de m puisque la valeur de l'excentricité e de la résultante R des deux forces préalables P et $\frac{P}{m}$ est fonction de m , et si l'excentricité varie, les contraintes varieront aussi.

Les conditions, A, B, C, D, et E que je vais étudier par la suite donnent les valeurs maxima de P en fonction de m et des limites admissibles de résistance des matériaux.

Dans tous les calculs qui vont suivre, étant donnée la faible hauteur des pièces par rapport à leur longueur, j'admettrai les hypothèses communes de la Résistance des Matériaux.

Par rapport à la transmission des charges préalables du fer au béton, on peut supposer qu'elle se réalise de façon concentrée aux bouts des pièces. Cette hypothèse sera complètement rigoureuse ou vraisemblablement très proche de la réalité quand l'on fait des « têtes » ou ancrages de béton, coulés à l'avance, ou quand on finit les armatures par de grands crochets. Les têtes transmettent la charge au reste de la pièce et absorbent alors toute ou presque toute l'adhérence.

Si dans certains cas, on faisait des pièces où la transmission des efforts se réalisât le long des barres, il faudrait tenir compte que la valeur de P ne pourra être considérée comme totalement transmise au béton qu'à une certaine distance des bouts de la pièce. Pour avoir une connaissance précise de cette question, il faudrait connaître la

loi d'après laquelle s'effectue cette transmission, c'est-à-dire la loi qui indique la véritable distribution de l'adhérence le long de la tige de fer.

1. — CONDITION A. — P en fonction de m et de σ'_{ad} .

Je considère la pièce déchargée complètement dans le sens transversal et soumise seulement aux charges longitudinales P et $\frac{P}{m}$ (fig. 4).

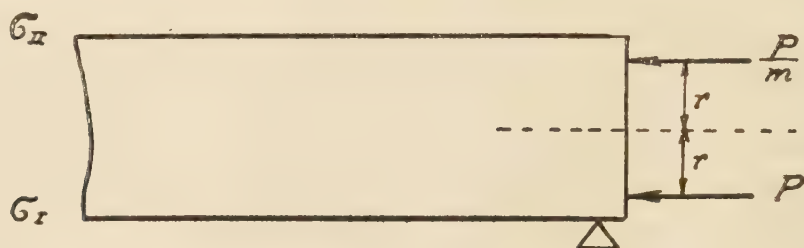


Fig. 4.

On se trouve devant le cas d'une pièce soumise à une compression excentrique. Appliquant la formule classique l'on a :

$$\sigma_{II}^I = \frac{P}{bh} - \frac{Pr}{W} + \frac{P}{mbh} + \frac{Pr}{mW},$$

W est le *moment résistant* de la section (sans fers naturellement puisque ceux-ci n'interviennent jusqu'à présent que pour transmettre la charge longitudinale) : $W = \frac{bh^3}{6}$.

σ_{II}^I ne pourra pas dépasser la valeur σ'_{ad} .

On arrive ainsi à l'expression :

$$(1) \quad P = \frac{\sigma'_{ad} m b h^2}{m(h - 6r) + (h + 6r)}.$$

2. CONDITION B. — P en fonction de m et de σ_{ad} .

D'une façon complètement analogue, on arrive en considérant le bord le plus proche de la charge P , à la formule (2) :

$$(2) \quad P = \frac{\sigma_{ad} m b h^2}{m(h + 6r) + (h - 6r)}.$$

En fixant la valeur de σ'_{ad} et de σ_{ad} , ces deux expressions nous

donnent deux courbes qui mettent en rapport P et m . Pour une valeur déterminée de m , la courbe qui donne la valeur de P la plus petite, indique le P maximum compatible avec la résistance du béton.

Remarque. — La valeur de P qui intervient dans ces calculs est la valeur nette, celle qui produit effectivement une flexion composée dans la section.

Mais, ainsi que je l'ai expliqué plus haut, le béton subit des déformations sous la charge longitudinale. Ces déformations sont de deux sortes : un raccourcissement du béton corrélatif de sa mise en tension ; et le retrait. Ces déformations du béton entraînent naturellement une diminution de longueur des tiges de fer, qui lui sont solidaires, et par conséquent une perte dans la charge de celles-ci. Par ailleurs, la force longitudinale se trouve aussi diminuée par les pertes dues aux supports qui maintiennent les tiges en tension. La valeur P est la valeur de la force une fois déduites toutes ces pertes.

La valeur de la déformation produite par le retrait sera variable avec l'intensité de la charge longitudinale, la qualité et le mode de fabrication du béton. Elle doit être déterminée par des expériences.

Les pertes dues aux supports doivent également être établies par l'expérience.

On peut calculer la chute de tension des fers, produite par le raccourcissement du béton.

Soit P_0 l'intensité de la force longitudinale avant le raccourcissement ; σ_0 la contrainte produite par P_0 ; λ_0 l'allongement du fer avant raccourcissement ; λ_e celui qui reste dans l'acier une fois la perte subie ; λ_b le raccourcissement du béton produit par la compression du fer.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} P &= f_e \sigma_e^l \\ \lambda_e &= \lambda_0 - \lambda_b \\ \lambda_e &= \frac{\sigma_e^l}{E_e}; \quad \lambda_0 = \frac{\sigma_0}{E_e}, \end{aligned}$$

donc :

$$P = f_e \lambda_e E_e = f_e E_e (\lambda_0 - \lambda_b)$$

ou :

$$\begin{aligned} P &= f_e E_e \left(\frac{\sigma_0}{E_e} - \frac{\sigma_b}{E_b} \right); \quad E_e = n E_b \\ \sigma_0 &= \frac{P + n f_e \sigma_b}{f_e}; \quad \sigma_0 = \frac{P_0}{f_e} \\ P_0 &= P + n f_e \sigma_b. \end{aligned}$$

Si la limite élastique du fer est, par exemple, 8.000 kg/cm^2 et si l'on porte jusqu'à ce taux les barres de fer, à cause de toutes ces pertes, on peut ne disposer que de 5.000 kg/cm^2 une fois que les barres ont été lâchées, et que le béton a subi sa déformation (1).

Cette différence entre le taux initial et final de l'acier, est précisément le taux auquel on peut faire travailler l'acier pour résister aux charges transversales. Dans le cas concret précédent, on aurait une pièce en béton armé dans laquelle le fer a une limite élastique de 3.000 kg/cm^2 .

Les conditions A et B regardent la pièce en elle-même, soumise exclusivement à ses forces internes. Les conditions C, D, et E vont considérer la pièce soumise aux charges totales qu'elle est destinée à supporter.

3. — CONDITION C. — P en fonction de m ; σ'_{ad} et σ_{ad} .

Cette condition exprime l'impossibilité pratique d'épuiser la résistance de la pièce par les contraintes produites par la seule force longitudinale. Si l'on arrivait à donner, par exemple, pour $m = 1$, la contrainte $\sigma'_I = \sigma'_{II} = \sigma_{ad}$, on respecterait les deux conditions antérieures A et B, mais la moindre charge transversale ferait dépasser à σ_{II} le taux admissible et pratiquement la pièce ne remplirait plus son rôle.

Il s'agit de trouver une formule qui donne une valeur de P en fonction de m , telle que l'on obtienne en même temps les limites σ'_{ad} et σ_{ad} .

Si l'on considère le bord II, le plus proche de $\frac{P}{m}$ on peut écrire :

$$\sigma'_{II} + \sigma''_{II} \leq \sigma_{ad}.$$

je prendrai le signe = pour trouver la valeur maxima de P .

D'une façon analogue pour le bord I on peut écrire :

$$\sigma'_I + \sigma''_I = \sigma'_{ad}.$$

Par l'hypothèse de la résistance des matériaux, on a :

$$\sigma''_{II} = \frac{\mathfrak{M}}{J} x ; \quad \sigma''_I = -\frac{\mathfrak{M}}{J} (h - x).$$

L'élimination de $\frac{\mathfrak{M}}{J}$ entre les deux groupes d'équations donne la relation :

$$(3) \quad \sigma_{ad} - \sigma'_{II} = (\sigma'_I - \sigma'_{ad}) \frac{x}{h - x}.$$

(1) Voir les chiffres pratiques donnés par M. FREYSSINET dans l'article déjà cité, p. 16.

Il faut maintenant exprimer σ_{II}^l , σ_I^l , et x en fonction de P.

D'après les formules (1) et (2) (en faisant intervenir les valeurs variables de σ_I^l et de σ_{II}^l au lieu des valeurs maxima) on a les expressions suivantes pour σ_I^l et σ_{II}^l :

$$(a) \quad \sigma_I^l = \frac{P}{mbh^2} [m(h + 6r) + (h - 6r)]$$

$$(b) \quad \sigma_{II}^l = \frac{P}{mbh^2} [m(h - 6r) + (h + 6r)].$$

La valeur de x , distance de l'axe neutre à la fibre II, est donnée par l'expression (voir fig. 5) :

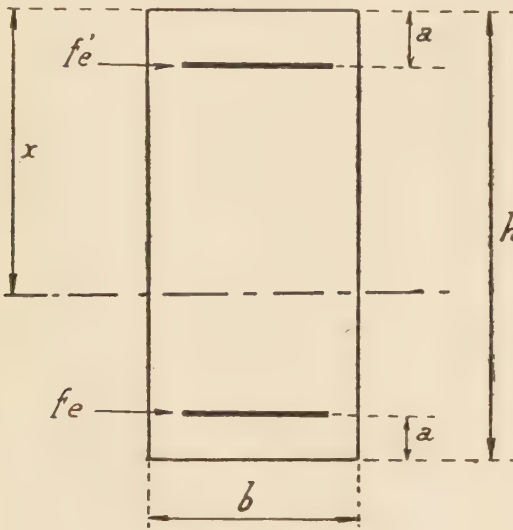


Fig. 5.

$$(a) \quad x = \frac{\frac{bh^2}{2} + nf_e'a + nf_e(h - a)}{bh + n(fe + fe')},$$

n représente ici, pratiquement, le rapport entre les modules d'élasticité du fer et du béton. Ce rapport n'est certainement pas constant ; dans les applications de la formule, il faudra donc prendre une valeur moyenne, celle que les expériences conseilleront comme la plus exacte.

Pour simplifier le développement des formules, j'ai considéré que les distances de l'axe de f_e' au bord II, et de l'axe de f_e au bord I sont égales. Dans la pratique, ces deux valeurs ne seront pas probablement très différentes.

En remplaçant dans la dernière expression f'_e par f_e , ce qui est possible parce que le rapport des deux forces est m , et parce que l'on fait travailler tous les fers au même taux, on a :

$$x = \frac{bh^2 + 2n\frac{f_e}{m}a + 2nf_e(h-a)}{2bh + 2n\left(f_e + \frac{f_e}{m}\right)},$$

et puisque

$$\begin{aligned} f_e &= -\frac{P}{\sigma'_e}; \quad \sigma'_e < 0 \\ (\beta) \quad x &= \frac{bh^2\sigma'_e - 2anP\left(\frac{1}{m} + \frac{h}{a} - 1\right)}{2bh\sigma'_e - 2nP\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \end{aligned}$$

et $(h-x)$ sera :

$$h-x = \frac{bh^2\sigma'_e - \frac{2nPh}{m} + 2anP\left(\frac{1}{m} - 1\right)}{2bh\sigma'_e - 2nP\left(1 + \frac{1}{m}\right)},$$

et le rapport $\frac{x}{h-x}$:

$$(c) \quad \frac{x}{h-x} = \frac{bh^2\sigma'_e - 2anP\left(\frac{1}{m} + \frac{h}{a} - 1\right)}{bh^2\sigma'_e - \frac{2nPh}{m} + 2anP\left(\frac{1}{m} - 1\right)}.$$

Introduisant les valeurs (a), (b), et (c) dans l'expression (3), on a :

$$\begin{aligned} &\frac{P}{mbh^2}[m(h-6r) + (h+6r)] - \sigma_{ad} + \\ &+ \left\{ \frac{P}{mbh^2}[m(h+6r) + (h-6r)] - \sigma'_{ad} \right\} \frac{bh^2\sigma'_e - 2anP\left(\frac{1}{m} + \frac{h}{a} - 1\right)}{bh^2\sigma'_e - 2nPh\left(1 + \frac{1}{m}\right) + 2anP\left(\frac{1}{m} + \frac{h}{a} - 1\right)} = 0, \end{aligned}$$

et faisant les transformations nécessaires, on arrive à la formule finale (4) dans laquelle on prend P comme inconnue et où σ'_{ad} , σ_{ad} et σ'_e figurent avec leurs signes relatifs :

$$\begin{aligned} &\sigma'_{ad} < 0; \quad \sigma_{ad} > 0; \quad \sigma'_e < 0 \\ (4) \quad &\left\{ \begin{aligned} &\frac{2P^2n}{m}[h^2(m+1)^2 + 6r(m-1)^2(h-2a)] + \\ &+ P\{2bh^3[-\sigma'_e(m+1) + n(-m\sigma'_{ad} - \sigma_{ad})] + 2abh^2n(-\sigma'_{ad} + \sigma_{ad})(1-m)\} - \\ &- b^2h^4m(-\sigma'_{ad} - \sigma_{ad})\sigma'_e = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Cette formule, une fois fixées toutes les valeurs, sauf m et P , donne une courbe qui met en rapport ces deux dernières quantités et qui est le lieu des points pour lesquels P est tel qu'une fois la pièce chargée longitudinalement avec cette force, et transversalement avec la force maxima admissible, on obtient en même temps les taux maxima admissibles σ'_{ad} et σ_{ad} , sur chacun des deux bords I et II.

Dans les conditions A, B et C, je n'ai fait intervenir que les résistances admissibles du béton. Les conditions D et E vont considérer les limites admissibles de l'acier.

4. — CONDITION D. — P en fonction de σ'_{ad} et σ_{ead} .

Ce sont les barres de fer, f_e , soumises à la traction P , qui risquent de dépasser le taux de fatigue admissible, puisqu'elles sont dans la zone de la section qui travaille à la traction par effet du moment transversal, et qu'ainsi leur contrainte de traction préalable se verra augmentée, tandis que les barres soumises à la force $\frac{P}{m}$ verront diminuer leur contrainte de traction par l'effet de $\mathfrak{N}$.

Pour les barres f_e on peut, dans la limite, écrire :

$$\sigma_e^l + \sigma_e^t = \sigma_{ead}$$

en admettant la distribution linéaire des contraintes, et donnant à n le sens exprimé plus haut, on a :

$$\sigma_e^t = -\frac{\mathfrak{N}}{J} n(h - x - a);$$

en fonction de la contrainte qui agit sur le bord I le moment vaut :

$$\mathfrak{N} = -\frac{\sigma_I^t J}{(h - x)} = -\frac{(\sigma'_{ad} - \sigma_I^l) J}{h - x}$$

cette dernière transformation parce que :

$$\sigma_I^l + \sigma_I^t \leq \sigma'_{ad};$$

et on arrive ainsi à l'expression :

$$(5) \quad (\sigma'_{ad} - \sigma_I^l) \frac{h - x - a}{h - x} = \frac{\sigma_{ead} - \sigma_e^l}{n}.$$

Il faut dans cette équation exprimer σ_I^l et x en fonction de P .

σ_I^l est donné par la formule (a). Avec la formule (β) on obtient :

$$\frac{h - x - a}{h - x} = \frac{bh^2\sigma_e^l - 2nPh \left(1 + \frac{1}{m}\right) - 2abh\sigma_e^l + 2anP \left(\frac{2}{m} + \frac{h}{a}\right)}{bh^2\sigma_e^l - \frac{2nhP}{m} + 2anP \left(\frac{1}{m} - 1\right)}$$

en remplaçant ces valeurs dans (5) et en faisant les transformations nécessaires, on arrive à :

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & P^2 \frac{2n}{bm^2h} (h-2a) \left[1 - \frac{6r}{h} + m \left(1 + \frac{6r}{h} \right) \right] - \\ & - P \left\{ \frac{1}{m} \left[\sigma_e^l (h-2a) \left(1 - \frac{6r}{h} \right) + 2n\tau'_{ad}(h-2a) + 2(\sigma_{ead} - \sigma_e^l)(a-h) \right] + \right. \\ & + \sigma_e^l (h-2a) \left(1 + \frac{6r}{h} \right) - 2a(\sigma_{ead} - \sigma_e^l) \left. \right\} + \\ & + bh\sigma_e^l \left[\sigma'_{ad}(h-2a) - h \frac{\sigma_{ead} - \sigma_e^l}{n} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette formule peut se représenter ainsi que la (4) par une courbe qui met en rapport m et P , une fois toutes les autres valeurs fixées. Elle constitue le lieu commun des points pour lesquels on obtient en même temps σ'_{ad} sur le bord I, et σ_{ead} dans les fers fe , proches de ce bord. Elle laisse de côté toutefois la valeur admissible du béton à la compression. Cette valeur sera envisagée par la condition E.

5. — CONDITION E. — P en fonction de σ_{ad} et σ_{ead} .

Le chemin à suivre est complètement analogue à celui de la formule antérieure (6) :

$$\begin{aligned} \sigma_e^l + \sigma_e^t &= \sigma_{ead} \\ \sigma_e^t &= - \frac{\mathfrak{M}}{J} n(h-x-a) \\ \mathfrak{M} &= \frac{\sigma_{II}^t J}{x} = \frac{\sigma_{ad} - \sigma_{II}^l}{x} J \\ \sigma_e^l - n(\sigma_{ad} - \sigma_{II}^l) \frac{h-x-a}{x} &= \sigma_{ead} \\ (\sigma_{ad} - \sigma_{II}^l) \frac{h-x-a}{x} &= \frac{\sigma_e^l - \sigma_{ead}}{n} \end{aligned}$$

remplaçant ici x et σ_{II}^l en fonction de P , on obtient l'expression finale :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & P^2 \frac{2n}{bhm^2} (2a-h) \left[1 + \frac{6r}{h} + m \left(1 - \frac{6r}{h} \right) \right] - \\ & - P \left\{ \frac{1}{m} \left[\sigma_e^l (2a-h) \left(1 + \frac{6r}{h} \right) + 2n\tau_{ad}(2a-h) - 2(\sigma_{ead} - \sigma_e^l)a \right] + \right. \\ & + \sigma_e^l (2a-h) \left(1 - \frac{6r}{h} \right) + 2(a-h)(\sigma_{ead} - \sigma_e^l) \left. \right\} + \\ & + bh\sigma_e^l \left[\sigma_{ad}(2a-h) - h \frac{\sigma_{ead} - \sigma_e^l}{n} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

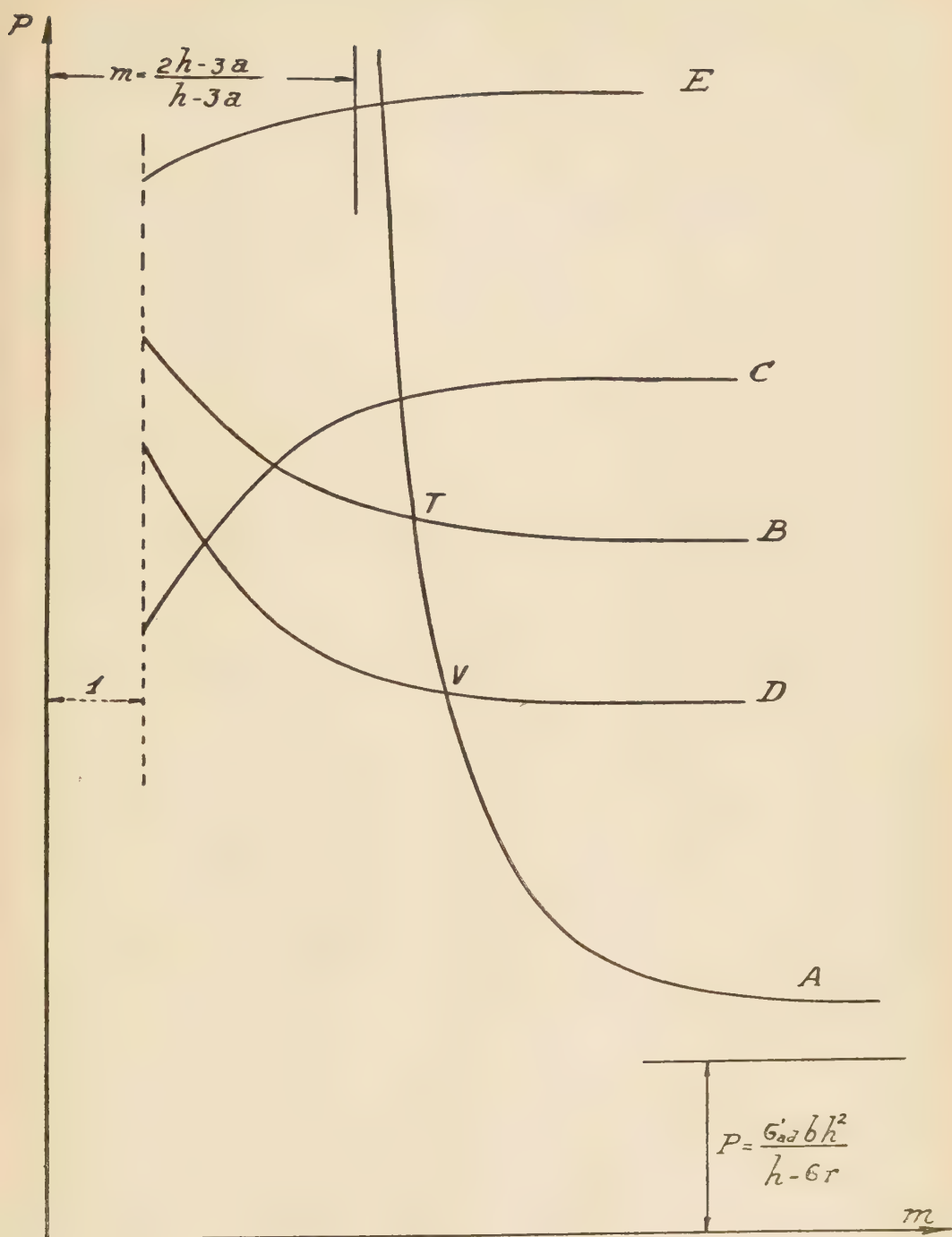


Fig. 6.

La formule (7) donne la valeur de la force P qui, en fonction de m , et avec le moment $\mathcal{M}$ produit par la force transversale, porte à la fois le bord II et le fer fe , jusqu'à leurs taux admissibles de fatigue, respectifs. Elle ne tient pas compte de la valeur σ'_{ad} , considérée dans la formule (6) et comme dans la pratique, c'est cette valeur qui est atteinte tout d'abord, la valeur de P sera limitée par l'expression (6).

De la formule (6) on peut passer directement à la formule (7) en changeant a par $(h - a)$; r par $-r$; et σ'_{ad} par σ_{ad} .

6. — Représentation graphique de A, B, C, D, E . — Points d'intersections V et T .

Les conditions A, B, C, D, E , représentées graphiquement peuvent offrir l'aspect de la fig. 6 (1)

D'après la nature même du problème, les tracés ne sont à faire que pour des valeurs de $m > 1$.

La courbe A a une asymptote parallèle à l'axe de P ; c'est la valeur qui correspond au moment où la résultante R des forces longitudinales touche le noyau central de la section. La force P peut croître alors indéfiniment, le bord opposé n'arrivera jamais à dépasser σ'_{ad} puisque sa contrainte est toujours nulle.

On peut calculer facilement la valeur qui correspond à m pour cette position.

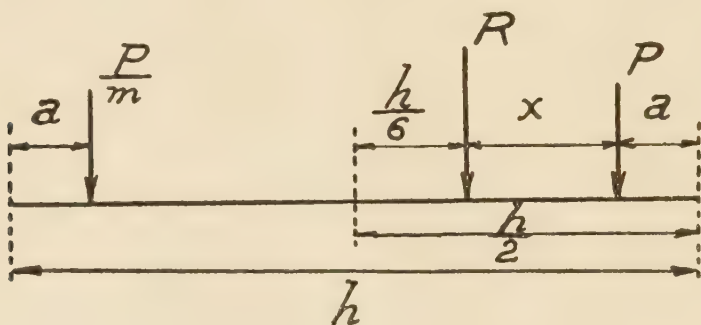


Fig. 7.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{h}{2} - \frac{h}{6} - a = \frac{h}{3} - a \\
 R \left(\frac{h}{3} - a \right) &= \frac{P}{m} \left(\frac{h}{3} + \frac{2h}{3} - 2a \right) = \frac{P}{m} (h - 2a) \\
 \frac{P + \frac{P}{m}}{\frac{P}{m}} &= \frac{h - 2a}{\frac{h}{3} - a} \quad \therefore \quad m = \frac{2h - 3a}{h - 3a}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

(1) Voir le cas concret analysé dans le chapitre IV.

en exprimant a en fonction de h on peut mettre l'équation sous la forme :

$$m = \frac{2\left(\frac{h}{a}\right) - 3}{\left(\frac{h}{a}\right) - 3}$$

en donnant un certain nombre de valeurs à $\left(\frac{h}{a}\right)$ on obtient le tableau et le graphique suivants :

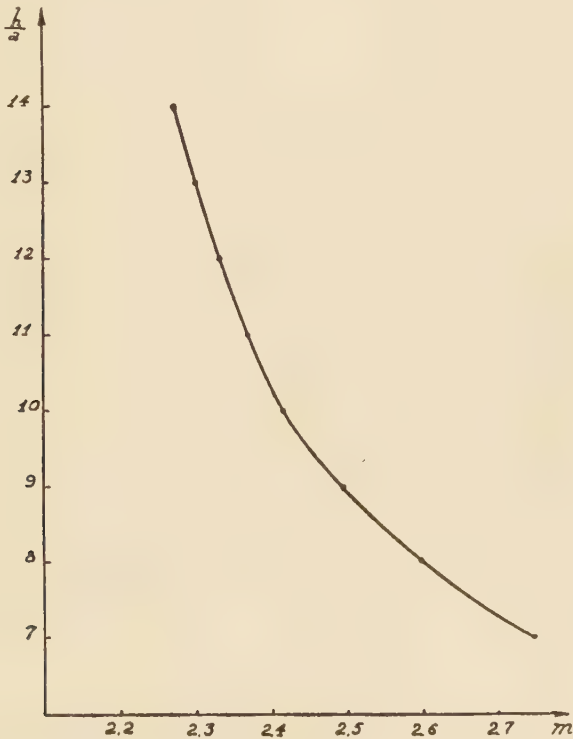


Fig. 8.

$\frac{h}{a}$	7	8	9	10	11	12	13	14
m	2,750	2,600	2,500	2,428	2,375	2,333	2,300	2,272

On obtient l'autre asymptote de la courbe A, en mettant l'équation (1) sous la forme :

$$P = \frac{\sigma'_{ad} b h^2}{(h - 6r) + \frac{(h + 6r)}{m}}$$

et en donnant à m la valeur $m = \infty$:

$$(9) \quad P = \frac{\sigma'_{ad} b h^2}{h - 6r}.$$

Il y a un autre point intéressant de la courbe A, c'est son intersection avec B. La valeur de P qui correspond à ce point est telle que la pièce chargée seulement longitudinalement, est soumise conjointement aux deux contraintes admissibles de traction et de compression : σ'_{ad} et σ_{ad} .

Faisant égales les équations (1) et (2) on a :

$$\frac{b h^2 m \sigma'_{ad}}{m(h - 6r) + (h + 6r)} = \frac{b h^2 m \sigma_{ad}}{m(h + 6r) + (h - 6r)}$$

et en effectuant les développements nécessaires :

$$(10) \quad m = \frac{(h + 6r)\sigma_{ad} - (h - 6r)\sigma'_{ad}}{(h + 6r)\sigma'_{ad} - (h - 6r)\sigma_{ad}}$$

c'est l'abscisse du point T de la figure 6.

Le point V, intersection des courbes A et D, marque le point pour lequel : 1^o la valeur de P est telle que la pièce chargée longitudinalement et transversalement supporte à la fois les contraintes de valeurs σ'_{ad} et σ_{ead} , et 2^o cette pièce, lorsqu'elle est soumise seulement à la précontrainte, supporte sur son bord II, une tension σ_{II}^I , égale à σ'_{ad} ; la valeur sur le bord I, étant inférieure à σ_{ad} .

Pour trouver l'expression générale des coordonnées du point d'intersection, il suffit de remplacer la valeur de $\frac{1}{m}$, tirée de la formule (1) :

$$\frac{1}{m} = \frac{\sigma_{II}^I b h^2 - P(h - 6r)}{P(h + 6r)}$$

dans la formule (6), équation de la courbe qui exprime la condition D.

Une fois réalisées toutes les transformations nécessaires, on arrive à l'équation suivante de deuxième degré qui donne la valeur de P .

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & P^2 \frac{2n(h - 6r)}{bh(h + 6r)} \left[\frac{h - 6r}{h + 6r} J - L \right] + P \left\{ \frac{2hn\sigma_{II}^I}{(h + 6r)} \left[L - \frac{2(h - 6r)}{(h + 6r)} J \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(h - 6r)}{(h + 6r)} \left[\sigma_e^I J + 2n\sigma'_{ad}(h - 2a) + 2(a - h)(\sigma_{ead} - \sigma_e^I) \right] - \sigma_e^I L + 2a(\sigma_{ead} - \sigma_e^I) \right\} + \\ & \quad + \frac{b h^2 \sigma_{II}^I}{(h + 6r)} \left\{ \left(\frac{2hn\sigma_{II}^I}{(h + 6r)} - \sigma_e^I \right) J - 2n\sigma'_{ad}(h - 2a) - 2(a - h)(\sigma_{ead} - \sigma_e^I) \right\} + \\ & \quad \left. + b h \sigma_e^I \left[\sigma'_{ad}(h - 2a) - h \frac{\sigma_{ead} - \sigma_e^I}{n} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \right.$$

équation dans laquelle J et L signifient :

$$J = \left(h - 6r - 2a + \frac{12ar}{h} \right)$$

$$L = \left(h + 6r - 2a - \frac{12ar}{h} \right).$$

La valeur de P ainsi obtenue, on calcule m en tenant compte de l'équation (1) :

$$(12) \quad m = \frac{P(h + 6r)}{\sigma_{II}^l b h^2 - P(h - 6r)}.$$

ce qui donne les deux coordonnées du point d'intersection V.

J'ai défini donc les courbes A, B, C, D et E et j'ai analysé avec plus de détail la courbe A (fig. 6).

D'après cette étude, si l'on se maintient au dedans de la surface limitée supérieurement par ces courbes, on est assuré d'avoir rempli toutes les conditions exigées par la résistance du matériau et par la nature de la pièce. Si l'on parcourt les courbes mêmes de la limite, on sera vraisemblablement dans les conditions les plus économiques. Par exemple, dans la figure 6, il faudrait parcourir la courbe A jusqu'au point V, à partir de celui-ci, la courbe D jusqu'à son intersection avec C et finalement cette courbe jusqu'à l'ordonnée 1.

Mais les conditions les plus économiques auxquelles je fais allusion ici, pour chaque valeur de m , négligent momentanément le fait de savoir lequel des m peut être le plus avantageux, pour un moment π déterminé.

Il faut tenir compte encore d'une autre variante qui peut faire changer les résultats.

Jusqu'à présent, j'ai considéré les fers soumis tous, à la même précontrainte σ_e^l . Je vais étudier maintenant les avantages possibles qu'il peut y avoir à diminuer ce taux pour les fers fe , proches du bord I.

Pour fixer les idées je raisonne sur la figure du cas concret défini plus loin (fig. 10).

Jusqu'ici, il n'y a que le point V qui jouisse des propriétés de la condition D, et corresponde en même temps à un état de précontrainte limite, déterminé par la condition A : $\sigma_{II}^l = \sigma'_{ad}$.

Pour les autres points de la courbe D (situés sur l'arc UV), on a $\sigma_e = \sigma_{ead}$ et $\sigma_I = \sigma'_{ad}$, mais la précontrainte, considérée isolément,

vérifie $\sigma_{II}^I < \sigma'_{ad}$, $\sigma_I^I < \sigma_{ad}$, et finalement on est au-dessous des exigences de la condition C.

Par contre, si l'on suit une des courbes A, B ou C, les précontraintes seront dans les cas-limites les plus avantageux, mais une fois la pièce chargée, le taux de travail de l'acier dépassera le taux admissible.

Je vais donc diminuer le taux σ_e^I des fers proches du bord I pour tâcher de remplir à la fois la condition D et une des conditions A, B ou C. Ainsi, la pièce déchargée aurait les valeurs-limites admissibles des précontraintes, et la pièce chargée serait dans les conditions optima exprimées par l'équation D. J'agirai de même pour la condition E.

Dans ce qui suivra, je désignerai par m comme ci-dessus le rapport des deux prétractions des aciers. Ce rapport sera différent maintenant du rapport $\frac{f_e}{f_e'}$ que je désignerai par m_1 .

III

EQUATIONS POUR OBTENIR m_1

1. CONDITION F. — m_1 , fonction de P ; σ_{ead} et σ'_{ad} .

J'appelle m_1 le rapport $\frac{f_e}{f'_e}$. Je rappelle que m est le quotient :
prétraction proche du bord I
prétraction proche du bord II. Si le taux de la précontrainte de f_e et de f'_e
est le même, $m_1 = m$.

D'après ces données :

$$\begin{aligned} (a) \quad & f_e = m_1 f'_e \\ (b) \quad & f'_e = - \frac{P}{m \sigma_e^l} \\ (c) \quad & f_e = - m_1 \frac{P}{m \sigma_e^l} \end{aligned}$$

σ_e^λ désigne le taux de la précontrainte du fer f_e , taux inférieur à σ_e^l qui était le taux maximum que l'on pouvait obtenir eu égard à la limite d'élasticité du fer, les pertes par le retrait et le raccourcissement du béton et les pertes dues aux supports.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} (d) \quad & \sigma_e^\lambda + \sigma_e^l = \sigma_{ead} \\ & \sigma_e^\lambda = - \frac{P}{f_e} = - \frac{P}{m_1 f'_e} = \frac{m}{m_1} \sigma_e^l \\ & \sigma_e^l = - n \frac{\mathfrak{N}}{J} (h - x - a) \\ & \sigma_1^l = - \frac{\mathfrak{N}}{J} (h - x), \end{aligned}$$

et comme :

$$\sigma_1^l + \sigma_1^i = \sigma'_{ad},$$

et

$$\begin{aligned} - \frac{\mathfrak{N}}{J} &= \frac{\sigma'_{ad} - \sigma_1^h}{h - x} \\ \sigma_e^l &= n(\sigma'_{ad} - \sigma_1^l) \frac{h - x - a}{h - x}, \end{aligned}$$

remplaçant les valeurs de σ_e^λ et σ_e^l dans la (d) :

$$(13) \quad \frac{m}{m_1} \sigma_e^l + n(\sigma'_{ad} - \sigma_1^l) \frac{h - x - a}{h - x} = \sigma_{ead},$$

il faut maintenant exprimer ici σ_1^l et x en fonction de P . σ_1^l est donné par la formule (a) de la p. 19.

Suivant le même développement de la p. 20, on arrive à la valeur de x :

$$(e) \quad x = \frac{bh^2 m \sigma_e^l - 2nP[a + m_1(h - a)]}{2bhm \sigma_e^l - 2nP(m_1 + 1)},$$

remplaçant dans la (13) et faisant toutes les transformations nécessaires on obtient cette expression :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & m_1^2 [2anP\sigma_{ead}] - m_1 \left\{ \frac{2n^2P^2}{bh^2m} \left[6r(m-1)(2a-h) + h(m+1)(2a-h) \right] + \right. \\ & + 2amnP\sigma_e^l + Pn \left[-2\sigma_{ead}(h-a) - 2n\sigma'_{ad}(2a-h) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sigma_e^l}{h} (2a-h)[m(h+6r) + (h-6r)] \right] + bh^2 m \sigma_e^l \left[\sigma_{ead} + n\sigma'_{ad} \left(\frac{2a}{h} - 1 \right) \right] \right\} - \\ & \left. - m \sigma_e^l \left[2nP(h-a) - bh^2 m \sigma_e^l \right] = 0. \right\} \end{aligned} \right.$$

Pour appliquer cette formule il suffit de choisir un point des courbes A, B ou C, dont l'ordonnée soit supérieure à celle de la courbe D, et remplacer les valeurs de son abscisse et de son ordonnée (m et P) dans l'équation (14). La valeur de m_1 ainsi obtenue, multipliée par fe' donne la section fe telle que, une fois la pièce complètement chargée, on arrive conjointement aux valeurs σ_{ead} et σ'_{ad} et que, en plus, une des conditions A, B ou C soit remplie.

Toutefois, la section ainsi conçue pourrait être soumise à une contrainte de compression dans le béton supérieure à l'admissible.

On doit donc chercher, avec un raisonnement complètement analogue, l'expression qui donne la section fe , en fonction de fe' , telle que les deux valeurs admissibles σ_{ead} et σ_{ad} soient atteintes en même temps.

2. CONDITION G. — m_1 , fonction de P ; σ_{ead} et σ_{ad} .

$$\begin{aligned}
 \sigma_e^\lambda + \sigma_e^t &= \sigma_{ead} \\
 \sigma_e^\lambda &= \frac{m}{m_1} \sigma_e^l \\
 \sigma_e^t &= -n \frac{\mathcal{N}}{J} (h - x - a); \quad \frac{\mathcal{N}}{J} = \frac{\sigma_{II}^t}{x}; \quad \sigma_{II}^t = \sigma_{ad} - \sigma_{II} \\
 \sigma_e^t &= -n(\sigma_{ad} - \sigma_{II}^l) \frac{h - x - a}{x} \\
 (15) \quad \frac{m}{m_1} \sigma_e^l - n(\sigma_{ad} - \sigma_{II}^l) \frac{h - x - a}{x} &= \sigma_{ead}.
 \end{aligned}$$

en mettant x et σ_{II}^l en fonction de P d'après les formules (a) de la p. 19 et (e) de la p. 30, et en développant on a :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &m_1^2 [2nP\sigma_{ead}(h-a)] - m_1 \left\{ \frac{2n^2P^2}{bh^2m} \left[6r(m-1)(2a-h) - h(m+1)(2a-h) \right] + \right. \\ &+ 2mnP\sigma_e^l(h-a) + Pn \left[-2a\sigma_{ead} - 2n\sigma_{ad}(h-2a) + \right. \\ &+ \frac{\sigma_e^l}{h} (2a-h)[m(h-6r) + (h+6r)] \left. \right] + bh^2m\sigma_e^l \left[\sigma_{ead} - n\sigma_{ad} \left(\frac{2a}{h} - 1 \right) \right] \left. \right\} - \\ &- m\sigma_e^l [2anP - bh^2m\sigma_e^l] = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut arriver directement à cette formule en partant de la formule (14). Il suffit de remplacer a par $(h-a)$; r par $-r$; et σ'_{ad} par σ_{ad} .

Les formules (14) et (16) peuvent servir à obtenir les formules (6) et (7), respectivement. Il faut pour cela faire $m_1 = m$ et prendre P comme variable.

Les conditions D et E peuvent ainsi être considérées comme des cas particuliers des conditions F et G. Leur sens cependant est différent. Dans les expressions D et E, on cherche P , ou m , l'un en fonction de l'autre, tels que des conditions déterminées soient remplies. Dans les expressions F et G, m et P sont déjà fixés, et connus, et l'on cherche m_1 .

Si en plus de P et m on a calculé x (distance de l'axe neutre au bord II dans la section où $f_e' = \frac{f_e}{m}$) et σ_1^l et σ_{II}^l ; au lieu d'appliquer

les formules (14) et (16), c'est plus simple d'employer directement les équations (13) et (15) où l'on a isolé la valeur m_1

$$(17) \quad m_1 = \frac{m\sigma_e^l}{\sigma_{ead} - n(\sigma'_{ad} - \sigma_1^l) \frac{h-x-a}{h-x}}.$$

$$(18) \quad m_1 = \frac{m\sigma_e^l}{\sigma_{ead} + n(\sigma_{ad} - \sigma_{II}^l) \frac{h-x-a}{x}}.$$

Le problème est maintenant de savoir : 1^o pour chaque m quel est le P le plus avantageux ; 2^o s'il y a lieu, une fois établi P , d'abaisser le taux σ_e^l de la précontrainte jusqu'à une valeur σ_e^λ inférieure au maximum possible ; 3^o quel est le m le plus avantageux pour un π déterminé à supporter.

En un mot, il s'agit de savoir, au point de vue économique, quelle solution adopter devant un cas concret à réaliser.

Pour cette étude, ayant déjà établi toutes les formules générales nécessaires, j'envisagerai un cas particulier avec des données numériques.

IV

ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

Soit une section rectangulaire. Ses dimensions en centimètres sont les suivantes :

$$h = 90 \text{ cm.}; \quad b = 42 \text{ cm.}; \quad a = 10,5 \text{ cm.}; \quad r = 34,5 \text{ cm.}$$

ce qui correspond à

$$\frac{h}{b} = 2,143; \quad \frac{h}{a} = 8,571; \quad \frac{h}{r} = 2,609,$$

pour n , rapport des modules d'élasticité du fer et du béton, j'ai choisi la valeur $n = 15$.

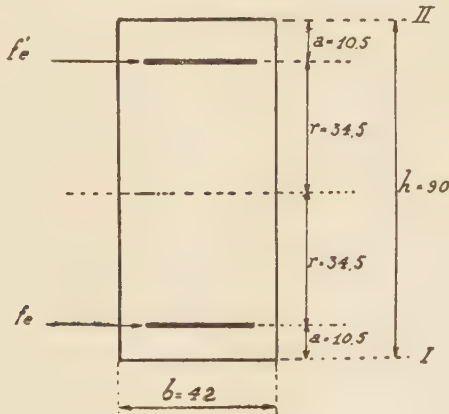


Fig. 9.

M. Freyssinet (1) a montré que n varie, non seulement avec la nature des charges extérieures, mais en fonction des facteurs étrangers à ces charges, facteurs qui dépendent des conditions intérieures du

(1) *Comptes Rendus des séances du Centre d'Etudes Supérieures de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, n° 7, juillet 1934 (100, rue du Cherche-Midi, Paris), p. 364 et suivantes.

matériau. La valeur de n devra être calculée en fonction de ces deux groupes de facteurs. Ce calcul devra donc se baser sur des expériences qui situent la pièce dans des conditions semblables à celles du cas envisagé. La valeur 15 que j'emploie ici n'est donc qu'une des valeurs possibles. Bien que j'admette une valeur de $\sigma'_{ad} > 0$ pour le béton, j'ai supposé le même n pour les deux groupes de fers, puisque pratiquement les contraintes de traction sont insignifiantes par rapport à celles de compression et on peut dire que toute la section travaille en général à la compression.

Les changements possibles à apporter à la valeur moyenne 15 ne vont pas changer l'aspect général des conclusions de cette étude.

Pour les contraintes admissibles, suivant les indications de M. Freyssinet (1), j'ai employé les valeurs :

$$\sigma_{ad} = 400 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{ead} = -8000 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_e^I = -5000 \text{ kg/cm}^2.$$

et pour la résistance à la traction du béton, j'ai admis

$$\sigma'_{ad} = -12 \text{ kg/cm}^2$$

Ces chiffres naturellement, doivent être établis d'après des essais effectués avec les matériaux à employer, et des expériences faites sur les pièces elles-mêmes doivent donner le critérium pour établir le taux maximum admissible.

De même, c'est l'expérience qui doit fixer la valeur des pertes dues au retrait du béton et aux supports qui maintiennent en tension les aciers. Considérant ces causes de pertes, j'ai fixé pour la valeur nette de la contrainte :

$$\sigma_e^I = -5000 \text{ kg/cm}^2.$$

Et pour le béton, ayant tenu compte de sa déformation, j'ai considéré comme valeur finale, une fois le retrait accompli :

$$\sigma_{II}^I = -8 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_I^I = 300 \text{ kg/cm}^2.$$

ces valeurs seront les taux admissibles du béton soumis à la seule charge longitudinale et calculé après le retrait.

1. — *Formules qui expriment les conditions A, B, C, D et E pour le cas particulier.*

(1) *Science et Industrie*, janvier 1933. Edition Construction et Travaux Publics, p. 16.

Condition A :

$$(19) \quad P = -\frac{2.721.600}{\frac{297}{m} - 117}.$$

Condition B :

$$(20) \quad P = \frac{102.060.000}{297 - \frac{117}{m}}.$$

Condition C :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} P^2(-37,098 + 67,149\frac{1}{m} + 67,149m) + \\ + P(27.305.100m - 1.708.480) - 22.452.790.000.000m = 0. \end{array} \right.$$

Condition D :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} P^2\left(-0,711769\frac{1}{m^2} + 1,80703\frac{1}{m}\right) + \\ + P(-890.660\frac{1}{m} + 1.075.500) - 3,2455 \times 10^{11} = 0. \end{array} \right.$$

Condition E :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} P^2\left(0,711769\frac{1}{m} - 1,80703\frac{1}{m^2}\right) - \\ - P\left[\frac{1}{m}(373500) - 34500\right] + 1,8144 \times 10^{11} = 0. \end{array} \right.$$

Appliquant la formule (8), on a l'asymptote de A parallèle à P :
 $m = 2,54$.

Avec la (9) on obtient l'autre asymptote : $P = 23,3 \text{ t}$.

Le point d'intersection de A avec B est donné par l'équation (10) :

$$m = \frac{297 \cdot 300 - 117 \cdot 8}{-297 \cdot 8 + 117 \cdot 300}; \quad m = 2,694.$$

La valeur P qui correspond au point V, intersection de A et D est donné par la (11) :

$$P^2 + 1.179.348P - 526.022.600.000 = 0$$

$$\therefore P = 345,0 \text{ t}$$

et m , d'après la (12) est : $m = 2,722$.

En donnant maintenant des valeurs à m , on obtient le tableau suivant.

<i>m</i>	P en tonnes			
	A	B	C	D
1,00		567,0	366,6	470,4
2,00		428,0	417,6	364,8
2,19		419,3	419,3	
2,25		416,5	420,4	354,9
2,54	∞	406,2	422,1	
2,65	544,0	404,0		
2,69	418,0			
2,694	402,0	402,0		345,6
2,695	401,0			
2,70	389,0	402,5		
2,71	367,2			345,3
2,717	354,0			345,2
2,722	345,0			345,0
2,726	338,2			
2,75	302,5			
2,758	292,6			
2,77	278,0			
2,80	248,0	400,0		
2,85	213,0			
3,00	151,2		423,1	
3,25	106,3			
4,00	63,7	381,0		
5,00	47,3			323,6
8,00	32,9	357,0	418,3	
∞	23,3	344,0	409,9	301,7

Je laisse de côté la condition E puisque ses valeurs de P sont de beaucoup supérieures à celles des autres courbes et ici sans intérêt pratique.

En portant sur l'axe des abscisses les valeurs de *m* et sur celui des ordonnées, celles de P, on a le graphique de la figure 10.

2. Formules qui expriment les conditions F et G pour le cas particulier.

Condition F :

$$\begin{aligned}
 (24) \quad & m_1^2 - m_1(6,7768m - 5.306.850 \frac{m}{P} - 10,093 + \\
 & + 1,0757 \times 10^{-5}P - 4,2375 \times 10^{-6} \frac{P}{m} - 0,000125m\sigma_e^l) + \\
 & + 675 \frac{m^2\sigma_e^l}{P} + 9,464 \times 10^{-4}m\sigma_e^l = 0,
 \end{aligned}$$

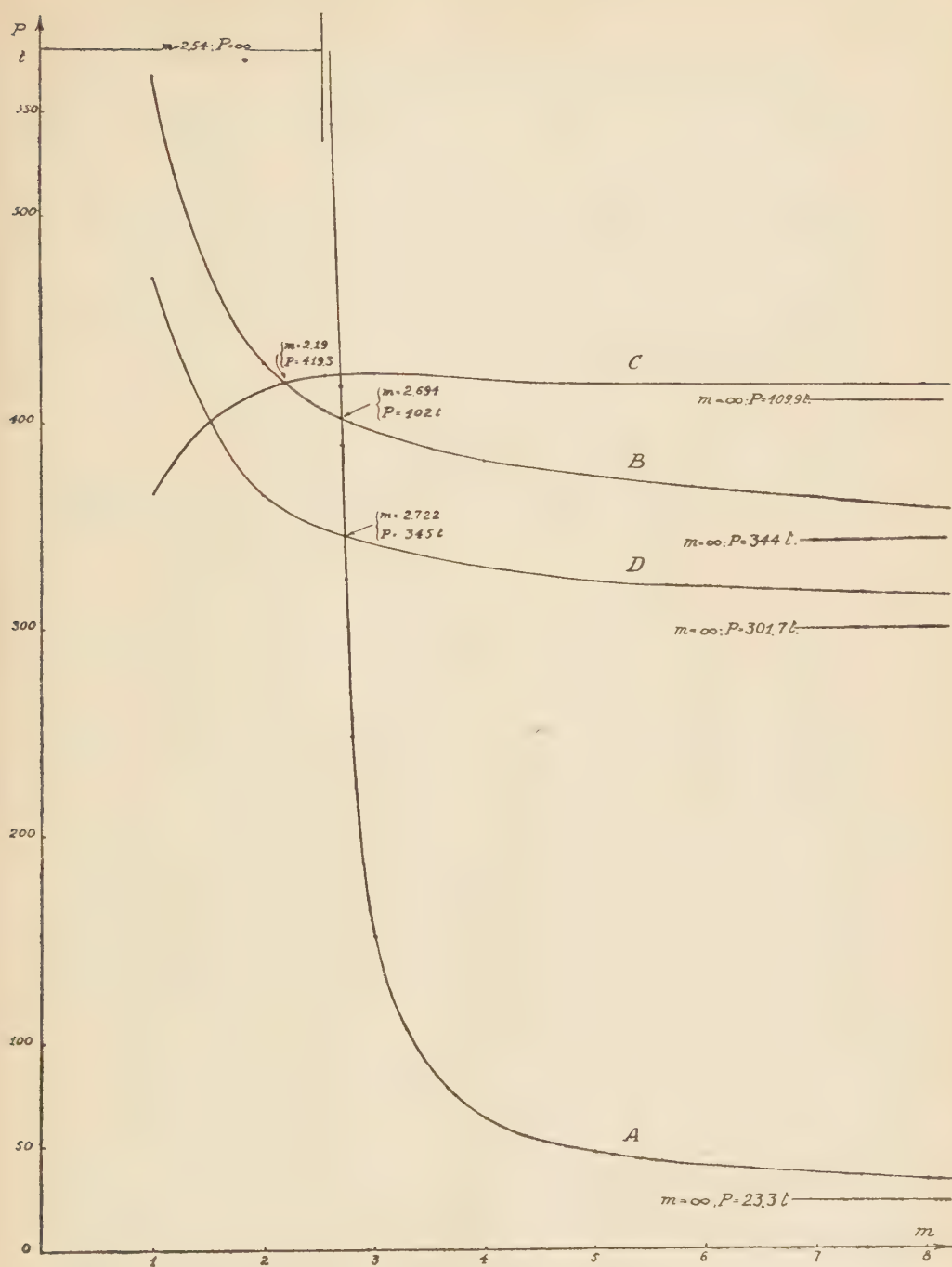


Fig. 10.

ou bien :

$$(25) \quad m_1 = \frac{5.000m}{8.000 - 15(\sigma_I^t + 12) \frac{79,5 - x}{90 - x}}$$

Condition G :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} 19.080.000Pm_1^2 + m_1 \{ - 11.925.000\dot{P}m + 10,6785 \frac{P^2}{m} (2,53846 - m) + \\ + 15P[448.500(2,53846 - m) - 660.000] + 5,783 \times 10^{12}m \} - \\ - 1.575.000m(5.400.000m + P) = 0 \end{array} \right.$$

ou bien :

$$(27) \quad m_1 = \frac{5.000m}{8.000 - 15(400 - \sigma_{II}^t) \frac{79,5 - x}{x}}$$

On obtient avec ces deux formules le tableau suivant :

m	P	m ₁	
		F	G
1,00	366,6		0,888
2,00	417,6	2,169	2,138
2,54	406,2	2,783	2,807
2,694	402,0	2,954	
2,71	367,2	2,805	
2,717	354,0	2,755	
2,722	345,0	2,722	

Le calcul des valeurs d'après la condition G, s'arrête au moment même où ces valeurs de m_1 , sont plus grandes que celles calculées d'après F. Ce n'est pas nécessaire d'aller plus loin puisque à partir de ce moment avec des valeurs fe plus grandes que celles données par la condition F on dépasserait la limite σ'_{ad} du béton à la traction.

La même réflexion se pose pour la condition F par rapport à G. Les valeurs de fe plus grandes que celles calculées d'après G, feraient dépasser la limite σ_{ad} de compression.

Avec les formules (11) et (12), j'avais obtenu les coordonnées du point V intersection de A et D. Ce sont $P = 345,0 t$; et $m = 2,722$.

Ce point, puisqu'il appartient à la courbe D jouit de la propriété d'atteindre en même temps les deux limites admissibles σ'_{ad} et σ_{ead} . Mais cette propriété est précisément celle que l'on veut obtenir en appliquant la condition F. Donc, si l'on applique la formule (24) ou

(25) à la valeur $m = 2,722$, on doit trouver $m_1 = 2,722$. C'est ce qu'on peut remarquer dans le tableau.

Il n'y a pas lieu d'appliquer les formules aux valeurs de m plus grandes que celles de V parce qu'elles donnent des taux $\sigma_{11}^l > \sigma'_{ad}$.

3. — Calcul du Prix de revient.

Il faut voir maintenant, au point de vue économique, quelles sont les valeurs de m et de m_1 qui offrent les plus grands avantages pour chaque cas déterminé.

Étant donné que la section de la pièce bh est égale à $0,378 \text{ m}^2$ et son périmètre $2(h + b) = 2,64 \text{ m}$ et puisque le poids spécifique du fer est $7,8 \text{ kg/dm}^3$, on a comme expression du prix de revient de la pièce par mètre de longueur :

$$(28) \quad 0,378A + 2,64B + 0,78CFe = S,$$

formule dans laquelle les lettres A , B , C et S signifient :

A le prix du béton par m^3 .

B le prix du coffrage par m^2 .

C le prix du fer par kilogramme.

S le prix de revient de la pièce par mètre.

et Fe est la section du fer en centimètres carrés.

Je ne donne cette formule que pour avoir un rapport entre les différentes solutions possibles. Les valeurs attribuées à A , B et C n'ont aussi qu'un sens exclusivement théorique. Il faudrait envisager aussi la variation du prix unitaire de la mise en tension des aciers, avec la longueur de la pièce : à mesure que la pièce augmente de longueur, logiquement ce prix doit diminuer.

J'attribue donc — seulement pour obtenir une comparaison — les valeurs suivantes à A , B et C .

$$A = 317,5 \text{ fr } m^{-3}; \quad B = 30,3 \text{ fr } m^{-2}; \quad C = 3,64 \text{ fr } \text{kg}^{-1}.$$

On arrive ainsi à :

$$120 + 80 + 2,84Fe = S \text{ (francs par mètre).}$$

Comme l'on suppose que la section ne varie pas, l'expression se réduit à une équation dont le premier membre est composé de deux termes : le premier invariable, qui comprend toutes les dépenses qui ne changent pas en faisant varier m ou m_1 ; le deuxième variable et proportionnel à la section du fer.

$$(29) \quad 200 + 2,84Fe = S.$$

La comparaison entre les différentes solutions sera établie par la

valeur de $\frac{S}{\mathfrak{N}}$, rapport entre le prix de revient par unité de longueur, et le moment fléchissant que la section est capable de supporter.

Pour cela, je vais calculer maintenant pour chaque m , les valeurs de S et de $\mathfrak{N}$ en fonction de P et de m .

4. — Exemple de la marche à suivre pour le calcul de $\frac{S}{\mathfrak{N}}$.

Prenons une valeur de m quelconque. Soit $m = 2,71$. J'essaierai d'abord la valeur de P donnée par la condition D : $P = 345,3 \text{ t}$.

D'après les formules (1) et (2) :

$$\sigma_I^l = \frac{P \left(297 - \frac{117}{m} \right)}{340.200}; \quad \sigma_I^l = 257,4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{II}^l = \frac{P \left(\frac{297}{m} - 117 \right)}{340.200}; \quad \sigma_{II}^l = -7,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Les sections des fers à employer seront :

$$f_e = -\frac{P}{\sigma_e^l}; \quad f_e = \frac{345,3 \text{ t}}{5 \text{ t/cm}^2}; \quad f_e = 69,1 \text{ cm}^2$$

$$f_e' = \frac{69,1}{2,71}; \quad f_e' = 25,5 \text{ cm}^2$$

$$F_e = 94,6 \text{ cm}^2,$$

Avec ces valeurs on a l'état complet de la pièce soumise exclusivement aux précontraintes nettes.

Naturellement, comme il a été déjà dit plus haut, pour connaître la valeur initiale de la traction P à donner aux fers, il faut calculer la valeur du raccourcissement du béton sous la charge, et il faut par l'expérience déterminer quelle est l'intensité du retrait et celle de la perte due aux supports. M. Freyssinet donne quelques chiffres à ce sujet (1). Je considère, à titre exclusivement indicatif, que les tensions initiales du béton subissent une perte d'un tiers à cause du retrait. Et que cette même cause avec les pertes dues aux supports font descendre la tension initiale du fer de 8.000 kg/cm^2 à 5.000 kg/cm^2 .

Avant retrait, les précontraintes initiales seraient donc :

$$\sigma_I^l = 386 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{II}^l = -11,2 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{et} \quad \sigma_e^l = -7.500 \text{ kg/cm}^2$$

et avant que les fers aient été lâchés :

$$\sigma_e^l = -8.000 \text{ kg/cm}^2.$$

(1) *Science et Industrie*, janvier 1933, p. 16.

La pièce a déjà ses dimensions, il s'agit de savoir maintenant quel moment fléchissant elle est capable de supporter.

L'axe neutre est donné par la formule (β) de la page 20.

$$(30) \quad x = \frac{170100 + 15(25,5 \cdot 10,5 + 69,1 \cdot 79,5)}{3780 + 15 \cdot 94,6}; \quad x = 49,34 \text{ cm.}$$

Avec x on calcule le moment d'inertie J .

$$J = \frac{b}{3}[x^3 + (h-x)^3] + n[f_e'(x-a)^2 + f_e(h-a-x)^2]$$

$$J = 14(49,34^3 + 40,66^3) + 15(25,5 \cdot 38,84^2 + 69,1 \cdot 30,16^2)$$

$$J = 4140500 \text{ cm}^4.$$

Puisque $\sigma_I^l = 257,4$, cela signifie que l'on dispose d'une contrainte admissible de traction aux forces transversales égale à $\sigma_I^t = -(257,4 + 12) = -269,4 \text{ kg/cm}^2$ et comme

$$\mathfrak{N} = \frac{-\sigma_I^l J}{h-x}.$$

$$\mathfrak{N} = \frac{269,4 \cdot 4140500}{40,66} = 274,5 \text{ tm.}$$

$$\sigma_e^t = -n \frac{\mathfrak{N}}{J} (h-a-x); \quad \sigma_e^t = -3000$$

$$\sigma_{e'}^t = +n \frac{\mathfrak{N}}{J} (x-a); \quad \sigma_{e'}^t = +3870$$

$$\sigma_{II}^t = \frac{\mathfrak{N}}{J} x; \quad \sigma_{II}^t = +327,5$$

ce qui donne comme contraintes finales totales :

$$\sigma_e = \sigma_e^l + \sigma_e^t = -5000 - 3000 = -8000 \text{ kg-cm}^{-2},$$

$$\sigma_{e'} = \sigma_{e'}^l + \sigma_{e'}^t = -5000 + 3870 = -1130 \text{ kg-cm}^{-2},$$

$$\sigma_I = \sigma_I^l + \sigma_I^t = +257,4 - 269,4 = -12 \text{ kg-cm}^{-2},$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{II}^l + \sigma_{II}^t = -7,5 + 327,5 = +320 \text{ kg-cm}^{-2}.$$

On peut constater que les deux limites σ_{ead} et σ'_{ad} ont été atteintes. C'est précisément la caractéristique des points qui appartiennent à la courbe D.

Le prix de la pièce d'après la formule (29) sera :

$$S = 200 + 2,84 \cdot 94,6; \quad S = 468,5 \text{ (francs par mètre).}$$

et le prix unitaire, par unité de longueur et par tonne-mètre :

$$\frac{S}{\mathfrak{N}} = \frac{468,5}{274,5}; \quad \frac{S}{\mathfrak{N}} = 1,706 \text{ (francs par mètre et par tonne-mètre).}$$

En faisant un calcul identique pour $m = 2,71$ et $P = 367,21$. (condition A) ; puis pour le même m et le même P , mais avec différentes valeurs de m_1 , on peut avoir une vue d'ensemble générale sur les variations de $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ avec $\mathfrak{M}$, et connaître ainsi, pour cet m quelle est la solution la plus avantageuse.

5. — Explication des tableaux et des graphiques.

C'est en suivant cette marche de calcul qu'ont été calculées les valeurs des deux tableaux suivants.

Pour faciliter la compréhension, les valeurs de m_1 ont été consignées, seulement à partir du moment où m_1 était égal à m .

Les valeurs du tableau I représentent les variations des différents éléments de chacun des m en fonction de P et de m_1 .

La solution qui correspond au $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ minimum pour chacun des m a été consignée dans le tableau II.

Les courbes des graphiques (fig. 11, 12 et 13) représentent les valeurs de $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ en fonction de $\mathfrak{M}$. Celles qui sont dessinées avec des traits discontinus correspondent aux variations de chaque m dont les valeurs figurent dans le tableau I. La courbe qui est dessinée avec un trait plein correspond aux valeurs minima des $\frac{S}{\mathfrak{M}}$. Ses valeurs sont celles qui figurent dans le tableau II.

Les graphiques donnent la solution la plus avantageuse, — c'est-à-dire, le P , le m et le m_1 — pour un moment fléchissant déterminé.

Il faut remarquer pour cela :

1^o Que les valeurs m et P de la courbe du tableau II ont été obtenues à partir de $m = \infty$, jusqu'à $m = 2,722$, d'après la condition A. C'est-à-dire, que la condition A donne les valeurs de $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ minima pour tous les m qui vont de l'infini jusqu'au point V, intersection des courbes A et D (voir fig. 6).

2^o Qu'à partir de $m = 2,722$ jusqu'à $m = 2,694$ — qui correspond au point T intersection de A et B — pour obtenir les minima $\frac{S}{\mathfrak{M}}$, il ne faut pas suivre la condition D, bien que ses exigences par rapport à P établissent une valeur de P moindre que celle donnée par A (voir fig. 10), mais continuer encore avec les valeurs de P données

par A, et comme ces valeurs font dépasser la limite admissible du fer σ_{ad} , appliquer les valeurs de m_1 données par la condition F.

3^o Que les ordonnées de la courbe (valeurs minima de $\frac{S}{\mathfrak{M}}$), une fois appliquée la condition F à la valeur $m = 2,694$ (ce qui amène le minimum dans cet m) coïncident avec les ordonnées de la courbe qui représente ce même $m = 2,694$ jusqu'au moment où σ_{II} ayant atteint la valeur σ_{ad} les ordonnées de la courbe $m = 2,694$ augmentent brusquement ; cette augmentation brusque constituant une limite pratique de l'application de la courbe des $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ minima.

Cette coïncidence de la courbe des $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ minima avec la courbe de $m = 2,694$ est due à ce que jusqu'à $m = 2,694$, à mesure que le moment fléchissant augmente, pour obtenir le $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ minimum, il faut diminuer m ; mais à partir de $m = 2,694$, une diminution de m amène une augmentation de $\frac{S}{\mathfrak{M}}$. Dans le langage géométrique je dirai que jusqu'à $m = 2,694$, les ordonnées minima des courbes représentatives des m , vont en diminuant, tandis que pour les courbes qui correspondent aux $m < 2,694$, les ordonnées minima augmentent.

En résumant ces conclusions, on peut dire :

1^o De l'infini jusqu'à V, les valeurs minima sont données par la condition A, exclusivement.

2^o De V jusqu'à T, ce sont les conditions A et F qu'il faut appliquer.

3^o Une fois appliquée la condition F à T, il y a une zone dans laquelle la courbe des $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ coïncide avec la courbe du m qui correspond à T.

4^o La valeur de m_1 qui produit dans $m = 2,694$, la valeur de $\sigma_{II} = \sigma_{ad}$, donne la limite pratique d'utilisation de la courbe des $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ minima.

Les figures 11, 12 et 13 donnent directement le prix $\frac{S}{\mathfrak{M}}$ en fonction de $\mathfrak{M}$, mais pour obtenir m , il faut faire l'interpolation entre les valeurs des courbes à traits discontinus. Le calcul direct de m et de m_1 en fonction de $\mathfrak{M}$ est donné par le graphique de la fig. 14.

Dans les figures 11, 12 et 13, j'ai dessiné aussi les courbes représentatives de R, σ_e et σ_{II} pour avoir une vue d'ensemble de la variation de ces valeurs avec la variation de m . Ces trois courbes correspondent aux valeurs de la courbe dessinée avec un trait continu.

e	m	P	R	σ_I^l	σ_{II}^l	σ_e^l	$\sigma_{e'}^l$	f_e	$f_{e'}$
Excentricité de R $e = r \left(\frac{2m}{m+1} - 1 \right)$ $e = 34,5 \left(\frac{2m}{m+1} - 1 \right)$	$m = \frac{h-2a}{r-e} - 1$ $m = \frac{69}{34,5-e} - 1$	Charge longi- tudi- nale nette sur f_e	$P + \frac{P}{m} = R$	Précontraintes (après retrait)				Section des aciers	
cm	n°	t	t	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	cm ²	cm ²
34,5	∞	15,0	15,0	+ 13,1	— 5,16	— 5.000	—	3,0	—
34,5	∞	23,3	23,3	+ 20,2	— 8	— 5.000	—	4,7	—
34,5	∞	23,3	23,3	+ 20,2	— 8	— 3.010	—	7,65	—
20,6	4	18,8	23,5	+ 14,2	— 1,81	— 5.000	— 5.000	3,76	0,94
20,6	4	64,0	80,0	+ 50,2	— 8	— 5.000	— 5.000	12,8	3,5
20,6	4	64,0	80,0	+ 50,2	— 8	— 1.715	— 5.000	37,3	3,2
15,959	2,722	17,2	23,52	+ 12,8	— 0,4	— 5.000	— 5.000	3,44	1,2
15,959	2,722	58,5	79,95	+ 43,6	— 1,7	— 5.000	— 5.000	11,7	4,3
15,959	2,722	148,0	202,3	+ 110,5	— 3,4	— 5.000	— 5.000	29,6	10,9
15,959	2,722	345,0	471,7	+ 257,5	— 8	— 5.000	— 5.000	69	25,3
15,959	2,722	345,0	471,7	+ 257,5	— 8	— 4.310	— 5.000	80	25,3
15,959	2,722	345,0	471,7	+ 257,5	— 8	— 3.920	— 5.000	88	25,3
15,936	2,717	354,0	484,3	+ 264,5	— 8	— 5.000	— 5.000	70,8	26,1
15,936	2,717	354,0	484,3	+ 264,5	— 8	— 4.930	— 5.000	71,8	26,1
15,936	2,717	354,0	484,3	+ 264,5	— 8	— 4.470	— 5.000	79,2	26,1
15,901	2,71	345,3	472,5	+ 257,4	— 7,5	— 5.000	— 5.000	69,1	25,5
15,901	2,71	367,2	502,8	+ 274	— 8	— 5.000	— 5.000	73,4	27,1
15,901	2,71	367,2	502,8	+ 274	— 8	— 4.830	— 5.000	76,0	27,1
15,901	2,71	367,2	502,8	+ 274	— 8	— 4.720	— 5.000	77,8	27,1
15,901	2,71	367,2	502,8	+ 274	— 8	— 4.440	— 5.000	82,7	27,1
15,901	2,71	367,2	502,8	+ 274	— 8	— 3.970	— 5.000	92,5	27,1
15,818	2,694	402	551,1	+ 300	— 8	— 5.000	— 5.000	80,4	29,8
15,818	2,694	402	551,1	+ 300	— 8	— 4.566	— 5.000	88	29,8
15,818	2,694	402	551,1	+ 300	— 8	— 4.535	— 5.000	88,7	29,8
15,818	2,694	402	551,1	+ 300	— 8	— 4.285	— 5.000	93,8	29,8
15,818	2,694	402	551,1	+ 300	— 8	— 4.080	— 5.000	98,4	29,8
15,818	2,694	402	551,1	+ 300	— 8	— 3.820	— 5.000	105,2	29,8
15,00	2,54	406,2	566,2	+ 300	0	— 5.000	— 5.000	81,3	32
15,00	2,54	406,2	566,2	+ 300	0	— 4.600	— 5.000	88,3	32
15,00	2,54	406,2	566,2	+ 300	0	— 4.560	— 5.000	89,1	32
15,00	2,54	406,2	566,2	+ 300	0	— 4.523	— 5.000	89,8	32
15,00	2,54	406,2	566,2	+ 300	0	— 4.220	— 5.000	96,2	32
15,00	2,54	406,2	566,2	+ 300	0	— 3.945	— 5.000	103	32
11,5	2	364,8	547,2	+ 256	+ 33,8	— 5.000	— 5.000	73	36,5
11,5	2	417,6	626,4	+ 293	+ 38,7	— 5.000	— 5.000	83,5	41,8
11,5	2	417,6	626,4	+ 293	+ 38,7	— 4.680	— 5.000	89,3	41,8
11,5	2	428,0	642,0	+ 300	+ 39,6	— 5.000	— 5.000	85,6	42,8

F_e	m_1	x	J	$\mathfrak{M}$	σ_I	σ_{II}	σ_e	σ_e'	S	$\frac{S}{\mathfrak{M}}$
$e = f_e + f_e'$	$m_1 = \frac{f_e}{f_e'}$	Distance du bord II à l'axe neutre	Moment d'inertie total par rapport à l'axe neutre	Moment flé- chissant	Contraintes totales maxima				$S = 200 + 2,84 F_e$	Prix par unité de longueur et par tm
cm ²	n°	cm	dm ⁴	tm	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	$\frac{f_r}{m}$	$\frac{f_r}{m \cdot tm}$
3,0		45,5	260,5	14,7	— 12	+ 20,2	— 5.288	—	208,5	14,2
4,7		45,6	263,9	19,1	— 12	+ 25	— 5.368	—	213	11,18
7,65		46,1	268,2	19,7	— 12	+ 25,8	— 5.367	—	222	11,25
4,7		45,46	263,5	15,5	— 12	+ 25,5	— 5.300	— 4.692	213	13,75
16,0	4	46,4	282,0	40,4	— 12	+ 58	— 5.706	— 4.234	246	6,075
40,5	11,66	49,1	320,3	48,7	— 12	+ 66,6	— 5.693	— 4.120	315	6,47
4,7		45,44	263,5	14,7	— 12	+ 24,9	— 5.285	— 4.708	213	14,5
16		46,1	283,1	35,85	— 12	+ 57	— 5.634	— 4.324	245,5	6,86
40,5		47,2	325,1	93,0	— 12	+ 135,8	— 6.430	— 3.375	315	3,48
94,3	2,722	49,91	413,4	274,5	— 12	+ 320	— 8.000	— 1.020	468	1,703
105,3	3,162	50,3	428,3	291,0	— 12	+ 333	— 7.265	— 980	499	1,715
113,3	3,48	51,0	437,2	302,2	— 12	+ 345	— 6.875	— 800	521	1,725
96,9	2,717	49,5	417,7	278,5	— 5,5	+ 322	— 8.000	— 1.090	475,3	1,707
97,9	2,755	49,6	419,2	287,0	— 12	+ 331	— 8.000	— 890	478,0	1,665
105,3	3,035	50,2	429,1	298,5	— 12	+ 340,5	— 7.530	— 860	499	1,67
94,6		49,34	414,1	274,5	— 12	+ 320	— 8.000	— 1.130	468,5	1,706
100,5	2,71	49,6	424,1	284,0	+ 4	+ 324	— 8.000	— 1.075	485	1,711
103,1	2,805	49,8	426,6	303,5	— 12	+ 346	— 8.000	— 810	493	1,624
104,9	2,87	49,9	429,5	306,3	— 12	+ 349	— 7.880	— 770	497,9	1,625
109,8	3,05	50,4	436,8	314,5	— 12	+ 363	— 7.590	— 700	512	1,627
119,6	3,415	51,2	448,5	331,0	— 12	+ 370	— 7.105	— 490	539	1,628
110,2	2,694	49,78	439,4	296,0	+ 29	+ 327	— 8.000	— 970	513	1,73
117,8	2,954	50,43	449,1	354,1	— 12	+ 389	— 8.000	— 270	534,6	1,509
118,5	2,977	50,48	450,0	354,2	— 12	+ 390	— 7.970	— 270	536	1,513
123,6	3,143	50,88	455,8	363,7	— 12	+ 398	— 7.710	— 160	551	1,515
128,2	3,303	51,2	461,5	368,5	— 10	+ 400	— 7.465	— 125	564	1,53
135	3,532	51,9	469,7	369,0	+ 5	+ 400	— 7.070	— 120	584	1,58
113,3	2,54	49,7	445,5	299,0	+ 29	+ 334	— 8.000	— 1.060	522	1,745
120,3	2,761	50,2	454,7	352,0	— 8	+ 389	— 8.000	— 390	541	1,54
124,1	2,783	50,25	456,0	359,0	— 12	+ 395	— 8.000	— 305	544	1,515
121,8	2,807	50,33	456,5	359,5	— 12	+ 396	— 7.963	— 300	546	1,518
128,2	3,005	50,9	464,3	364,9	— 8	+ 400	— 7.585	— 240	564	1,545
135	3,218	51,4	472,7	368,0	— 1	+ 400	— 7.225	— 220	584	1,583
109,5		48,48	444,0	286,5	— 12	+ 346,5	— 8.000	— 1.325	511	1,780
125,3	2	48,8	470,7	306,4	+ 24,5	+ 357	— 8.000	— 1.260	556	1,81
131,1	2,138	49,3	478,8	350,5	— 5	+ 400	— 8.000	— 740	572,3	1,633
128,4	2	48,7	474,0	308,0	+ 32	+ 356	— 8.000	— 1.290	564	1,83

TABLE

e	m	P	R	σ_I^l	σ_{II}^l	σ_e^l	$\sigma_{e'}^l$	f_e	$f_{e'}$
Excentricité de R $e = r \left(\frac{2m}{m+1} - 1 \right)$ $e = 34,5 \left(\frac{2m}{m+1} - 1 \right)$	$m = \frac{h-2a}{r-e} - 1$ $m = \frac{69}{34,5-e} - 1$	Charge longi- tudi- nale nette sur f_e	$R = P + \frac{P}{m}$	Précontraintes (après retrait)				Section des aciers	
cm	n°	t	t.	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	cm ²	cm ²
34,5	∞	23,3	23,3	+ 20,2	— 8	— 5.000	—	4,7	—
26,8	8	34,1	38,4	+ 28,3	— 8	— 5.000	— 5.000	6,8	0,85
20,6	4	64,0	80,0	+ 50,2	— 8	— 5.000	— 5.000	12,8	3,2
18,3	3,25	106,3	139,1	+ 81,6	— 8	— 5.000	— 5.000	21,3	6,6
17,3	3	152,0	202,7	+115	— 8	— 5.000	— 5.000	30,4	10,1
16,6	2,85	213,0	287,8	+160	— 8	— 5.000	— 5.000	42,6	14,95
16,2	2,77	278,0	378,3	+208,4	— 8	— 5.000	— 5.000	55,6	20,1
16,13	2,758	292,6	399,0	+219,1	— 8	— 5.000	— 5.000	58,5	21,2
16,09	2,75	302,5	412,5	+226,3	— 8	— 5.000	— 5.000	60,5	22
15,98	2,726	338,2	462,3	+251,8	— 8	— 5.000	— 5.000	67,6	24,8
15,959	2,722	345,0	471,7	+257,5	— 8	— 5.000	— 5.000	69	25,3
15,936	2,717	354,0	484,3	+264,5	— 8	— 4.930	— 5.000	71,8	26,1
15,901	2,71	367,2	502,8	+274	— 8	— 4.830	— 5.000	76,0	27,1
15,818	2,694	402	551,1	+300	— 8	— 4.566	— 5.000	88	29,8
15,818	2,694	402	551,1	+300	— 8	— 4.080	— 5.000	98,4	29,8

F_e	m_1	x	J	$\mathcal{M}$	σ_I	σ_{II}	σ_e	σ_e'	S	$\frac{S}{\mathcal{M}}$
$= f_e + f_e'$	$m_1 = \frac{f_e}{f_e'}$	Distance du bord II à l'axe neutre	Moment d'inertie total par rapport à l'axe neutre	Moment fléchisseur	Contraintes totales maxima				$S = 200 + 2,84F_e$	Prix par unité de longueur et par tm
cm ²	n°	cm.	dm ⁴	tm.	kg/cm ²	gk/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	$\frac{fr}{m}$	$\frac{fr}{m \cdot tm}$
4,7		45,6	263,9	19,1	— 12	+ 25	— 5.368	—	213	11,18
7,65		45,8	268,4	24,5	— 12	+ 34	— 5.461	— 4.517	222	9,06
16,0		46,4	283,1	40,4	— 12	+ 58	— 5.706	— 4.234	246	6,075
27,9		46,9	303,3	65,9	— 12	+ 94	— 6.060	— 3.825	279	4,24
40,5		47,6	324,9	97,3	— 12	+ 136	— 6.430	— 3.337	315	3,24
57,55		48,2	353,4	145,5	— 12	+ 190	— 6.932	— 2.670	364	2,50
75,7		48,8	383,4	205,0	— 12	+ 254	— 7.465	— 1.960	415	2,02
79,7		48,9	390,1	219,5	— 12	+ 267	— 7.580	— 1.760	426	1,95
82,5		49,04	394,7	230,0	— 12	+ 278	— 7.680	— 1.630	434	1,89
92,4		49,31	410,3	266,0	— 12	+ 312	— 7.950	— 1.240	462	1,74
94,3	2,722	49,41	413,4	274,5	— 12	+ 320	— 8.000	— 1.120	468	1,703
97,9	2,755	49,6	419,2	287,0	— 12	+ 331	— 8.000	— 890	478	1,665
103,1	2,805	49,8	426,6	303,5	— 12	+ 346	— 8.000	— 810	493	1,624
117,8	2,954	50,43	449,1	354,1	— 12	+ 389	— 8.000	— 270	534,6	1,509
128,2	3,303	51,2	461,5	368,5	— 10	+ 400	— 7.465	— 125	564	1,53

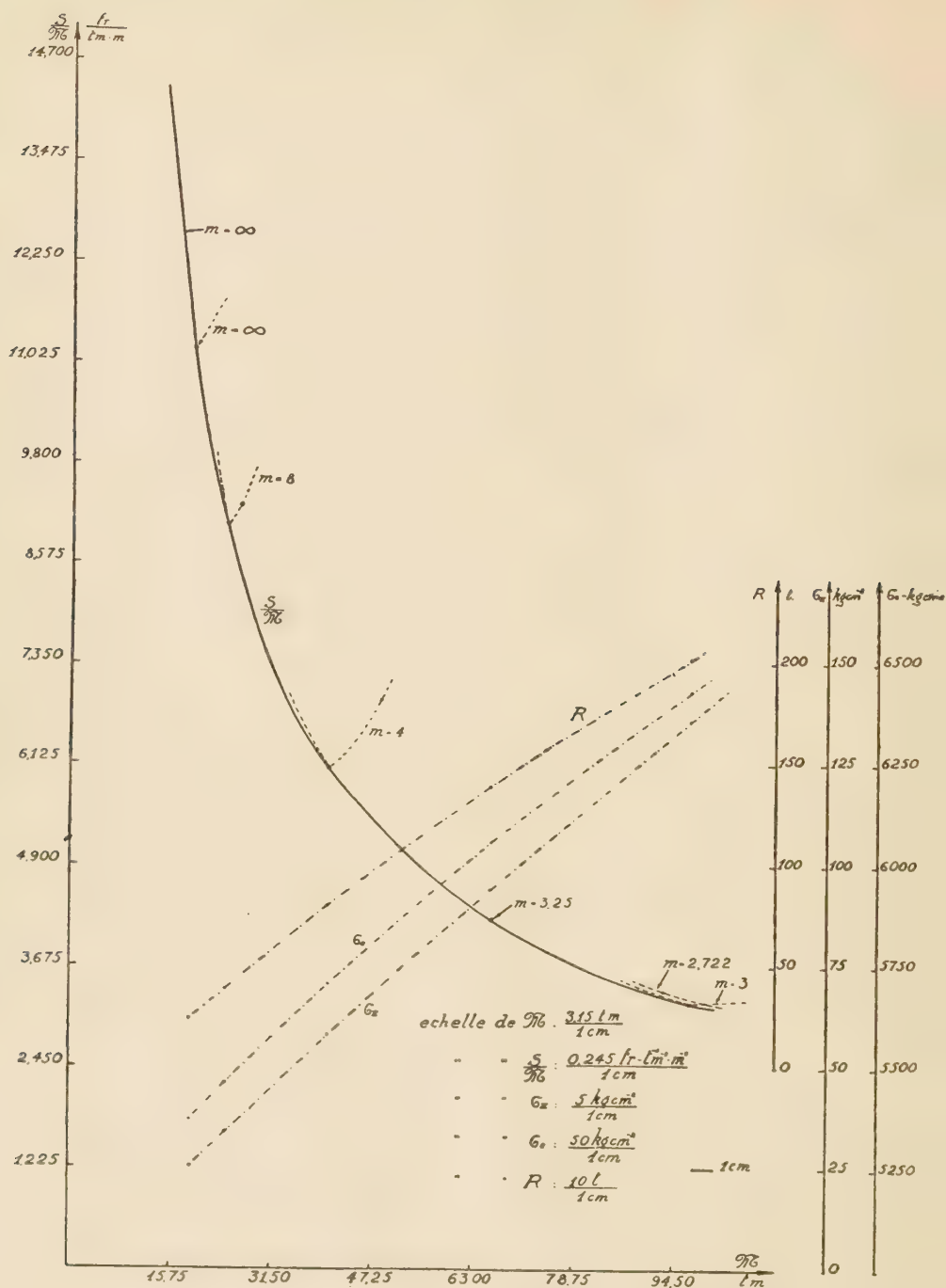


Fig. 11.

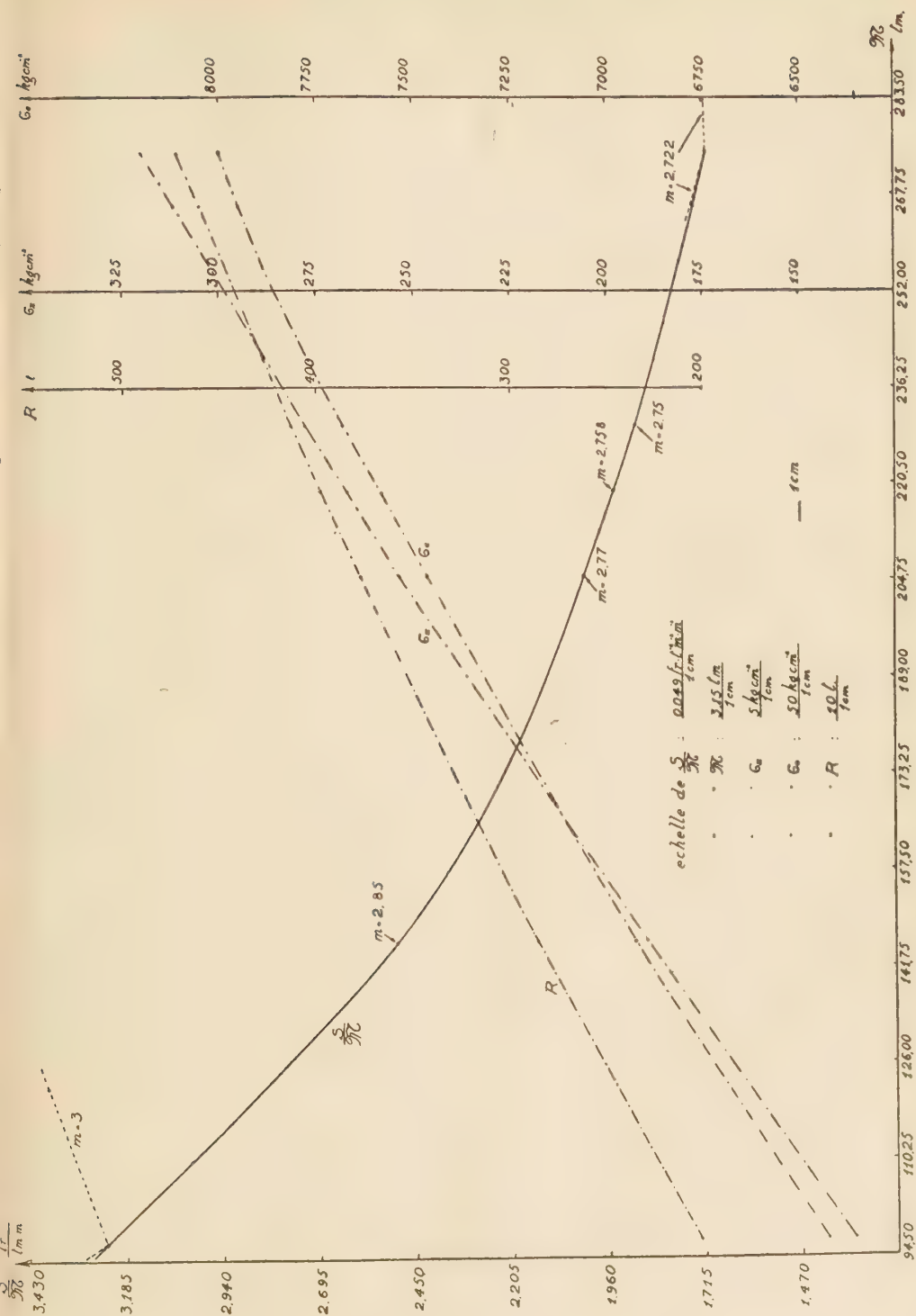


Fig. 12

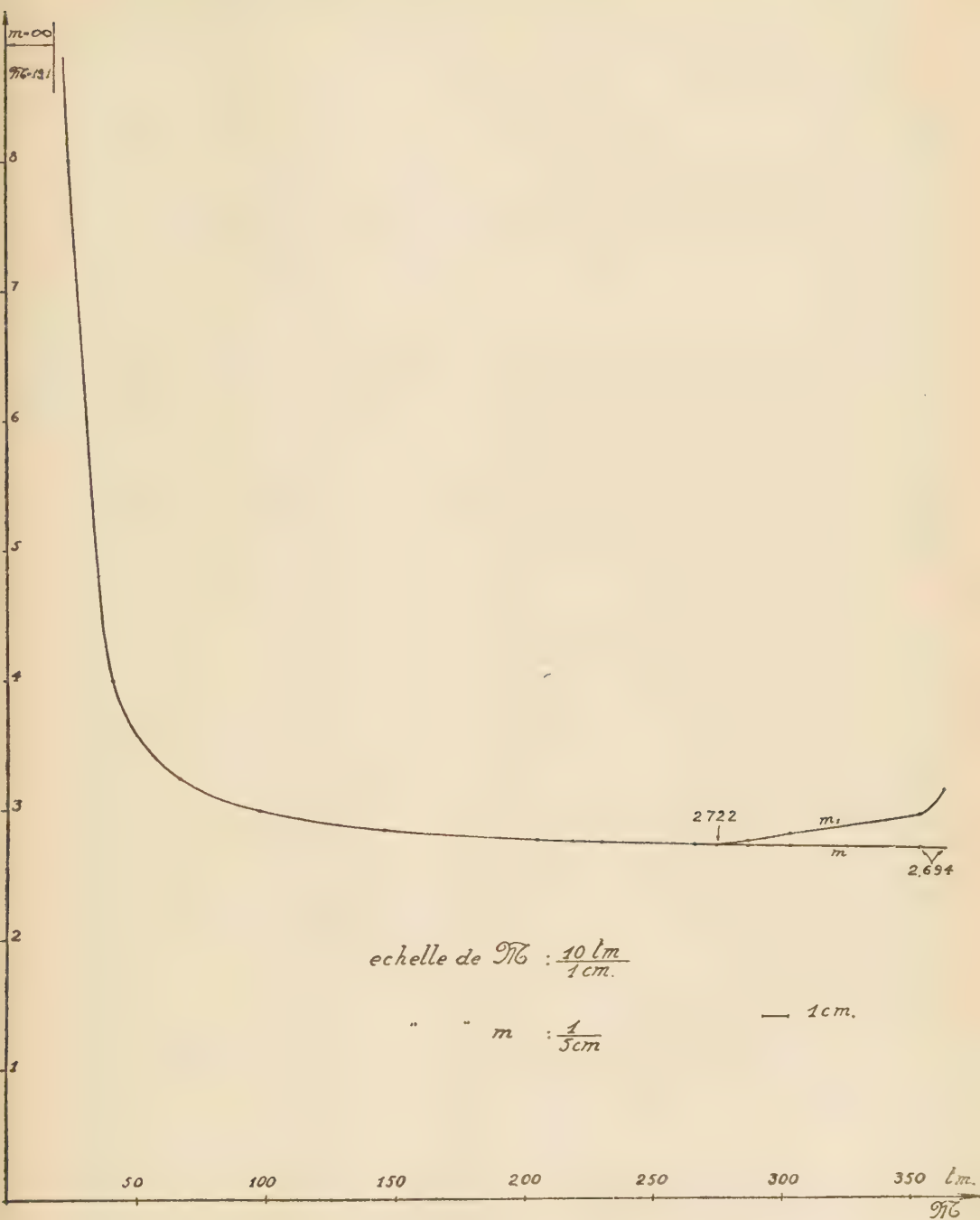


Fig. 14,

GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES DU CAS PARTICULIER

Les chiffres des tableaux transcrits plus haut peuvent être utilisés pour calculer des pièces avec des dimensions différentes de celles envisagées dans le cas particulier choisi.

Si l'on multiplie par un facteur k les dimensions linéaires de la section, pour maintenir exactement les mêmes contraintes que dans la pièce primitive, il suffit de multiplier :

- P : par k^2
- R : par k^2
- Fe, fe, et fe' : par k^2
- π : par k^3
- x : par k .
- J : par k^4
- e : par k
- r : par k
- m : reste le même.

Le prix S doit être calculé de nouveau avec la formule suivante :

$$(31) \quad S = 0,378k^2A + 2,64kB + 0,78k^2CF_e,$$

et on aura ainsi le nouveau rapport $\frac{S}{\pi}$.

Exemple : Soit le cas où $m = 2,71$ et $m_1 = 2,805$. Multipliant les dimensions linéaires de la section par 2 on a :

$$h = 180 \text{ cm.}; \quad b = 84 \text{ cm.}; \quad r = 69 \text{ cm.}; \quad a = 21 \text{ cm.}$$

Avec P égal à $367,2 \times 4 = P = 1.468,8 \text{ t}$
et les sections des aciers :

$$\begin{aligned} fe' &= 76 \times 4 = 304 \text{ cm}^2, \\ fe &= 27,1 \times 4 = 108,4 \text{ cm}^2; \quad Fe = 412,4 \text{ cm}^2, \end{aligned}$$

les précontraintes seront les mêmes que pour le cas particulier analysé précédemment :

$$\begin{aligned} \sigma_e^l &= -5\,000 \text{ kg-cm}^{-2}; & \sigma_e^l &= -4\,830 \text{ kg-cm}^{-2}; & \sigma_I^l &= +274 \text{ kg-cm}^{-2}, \\ \text{et} & & \sigma_{II}^l &= -8 \text{ kg-cm}^2. \end{aligned}$$

La distance de l'axe neutre au bord II est :

$$x = 49,8 \times 2; \quad x = 99,6 \text{ cm.}$$

et le moment d'inertie total par rapport à cet axe :

$$J = 426,6 \cdot 16; \quad J = 6\,826,2 dm^4.$$

Le moment fléchissant que cette section est capable de supporter est :

$$\mathfrak{M} = 303,5 \times 8; \quad \mathfrak{M} = 2\,428 \text{ tm.}$$

et les contraintes finales maxima sont les mêmes du cas pris comme cas type :

$$\begin{aligned} \sigma_I &= -12 \text{ kg-cm}^{-2}; & \sigma_{II} &= +346 \text{ kg-cm}^{-2}; \\ \sigma_e &= -8\,000 \text{ kg-cm}^{-2}; & \sigma_e' &= -810 \text{ kg-cm}^{-2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir le prix unitaire, en appliquant la formule (31) on a :

$$S = 479 + 160 + 2,84Fe \therefore S = 639 + 2,84Fe,$$

ce qui donne : $S = 1.811$ (francs par mètre).

Et le prix par unité de longueur et par tm. sera :

$$\frac{S}{\mathfrak{M}} = \frac{1\,181}{2\,428} = 0,746 \text{ (francs par mètre et par tonne-mètre).}$$

VI

CALCUL DES EFFETS PRODUITS PAR LES EFFORTS TRANCHANTS

La section de la pièce n'a été envisagée jusqu'à présent que comme devant résister aux seules contraintes normales produites, soit par les charges préalables toutes seules, soit par ces charges et celles que la pièce est effectivement destinée à supporter. Les conclusions ainsi obtenues peuvent s'appliquer à des pièces ayant une longueur quelconque.

Par contre, l'effort tranchant, pour un même moment fléchissant maximum, varie avec l'écartement des appuis. Son effet doit donc être étudié pour chaque cas particulier.

La marche à suivre dans le calcul est la marche classique qui est suivie pour obtenir les contraintes principales dans les différents points de la pièce.

Une fois l'effort tranchant Q connu, on applique la formule de Colignon pour avoir les contraintes tangentielles τ .

$$(32) \quad \tau = \frac{Q S_v}{J b},$$

où S_v est le moment statique de la partie de la section située au-dessus de la fibre considérée (en supposant la position normale des poutres fléchies), par rapport à la ligne neutre ; J , le moment d'inertie total de la section et b la largeur de la section à la hauteur de cette fibre.

Avec cette valeur de τ et la valeur de σ calculée précédemment, on obtient les deux contraintes principales par la formule :

$$(33) \quad \sigma_{1-2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2},$$

qui procède de la formule suivante dans laquelle une des contraintes normales est nulle :

$$(34) \quad \sigma_{1-2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2},$$

le signe positif correspond à une des contraintes principales, le signe négatif à l'autre.

Avec les valeurs données par la formule (33) on peut dessiner le cercle de Mohr, et, connaissant la courbe de résistance intrinsèque du béton employé, on peut voir assez facilement si l'on est à l'intérieur des limites admissibles.

Ce dernier calcul peut être fait d'une façon très pratique en suivant le procédé employé par M. Chalos. Lorsqu'on aura déterminé en un point, le rayon et l'abscisse du centre de la circonférence de Mohr correspondant au système de forces appliqué, il suffira, pour qu'il n'y ait pas rupture, en ce point, de vérifier que l'abscisse trouvée est supérieure à celle de la circonférence de rupture du même rayon, tangente à la courbe de résistance intrinsèque du matériau employé (1).

Les formules (32 et (33) doivent être appliquées à plusieurs points de chacune des sections de la pièce. La vérification avec la courbe intrinsèque doit être telle donc, que dans tous les points de la pièce, la circonférence de Mohr lui soit intérieure.

La formule (34) fait voir l'influence favorable qu'une contrainte de compression σ_y , normale à σ_x , peut avoir sur les valeurs des contraintes principales. Il s'agit d'obtenir que le cercle de Mohr soit le plus à droite possible de l'axe des τ dans la courbe intrinsèque. On sera amené ainsi probablement à comprimer aussi la pièce transversalement à son axe, pour mieux résister aux cisaillements. L'analyse de chacun des cas particuliers devra conseiller l'intensité à donner à cette nouvelle précontrainte (2).

Il faut bien remarquer, cependant, que dans toutes les déductions que je viens de faire, l'on postule les hypothèses classiques de la résistance des matériaux. Il y aura sûrement des régions dans la pièce où ces hypothèses ne sont pas d'accord avec la réalité. Il faudra donc aussi s'efforcer de connaître d'une façon expérimentale la direction et la valeur des contraintes principales dans ces régions, et confirmer, s'il y a lieu, les hypothèses admises, dans les zones où probablement elles sont applicables.

L'essai photoélasticimétrique de la deuxième partie de ce travail tend à éclaircir cette question.

(1) CHALOS. Application de la courbe de résistance intrinsèque du béton au calcul rationnel du béton armé (*Annales des Ponts et Chaussées*, juillet 1935, VII, p. 76).

(2) E. FREYSSINET. *Une Révolution*, p. 68.

DEUXIÈME PARTIE

ESSAI PHOTOÉLASTICIMÉTRIQUE

VII

RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS GÉNÉRALES

Pour connaître, d'une façon complète, l'état élastique plan d'un corps, il est nécessaire, et suffisant, de connaître en chacun de ses points la direction et l'intensité des deux contraintes principales.

Ces éléments connus, on peut tout de suite calculer l'intensité des contraintes qui agissent sur des plans à inclinaison quelconque, passant par le point déterminé, au moyen de l'ellipse de Lamé.

Les essais photoélasticimétriques ont pour but, précisément, d'obtenir par un procédé expérimental, la direction et l'intensité des contraintes principales.

Le procédé à employer consiste dans l'étude d'un modèle réduit de la pièce réelle, fabriqué en matière transparente (verre, xylonite, bakélite, phénolite, etc.) et traversé par de la lumière polarisée.

Ce qui permet l'application de ce procédé aux matériaux habituellement utilisés dans l'industrie est le fait que la distribution des contraintes dans un corps est indépendante de la valeur du coefficient d'élasticité de ce corps, tant que les forces appliquées sont elles aussi indépendantes de ce coefficient. Ce fait permet d'appliquer les résultats obtenus avec du verre, ou de la bakélite — si la limite élastique n'a pas été dépassée — au fer et au béton.

La propriété physique qui permet la réalisation de la méthode est celle que possèdent plusieurs corps solides, transparents, isotropes, monoréfringents à l'état naturel, d'acquérir le biréfringence lorsqu'ils sont soumis à un état de contrainte.

La caractéristique fondamentale de cette double réfraction accidentelle consiste dans le fait que les plans selon lesquels se dédouble

le rayon incident sont précisément les directions des contraintes principales au point que l'on considère. On doit ajouter à cette condition qui établit la direction des contraintes une autre propriété : la différence de phase entre les deux rayons réfractés, à la sortie du corps, est proportionnelle à son épaisseur et à la différence algébrique des contraintes principales :

$$(35) \quad \Delta = ke(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (\text{Loi de Wertheim})$$

Pour arriver à cette formule, il est bon d'introduire la notion d'« épaisseur optique » (1) établie dans les traités de physique.

L'épaisseur optique e_0 est le produit de l'épaisseur géométrique e par l'indice de réfraction i_x de la matière étudiée :

$$e_0 = ei_x.$$

L'indice de réfraction est différent pour chacune des deux directions privilégiées et ses valeurs sont :

$$\begin{aligned} i_1 &= i + a\sigma_1 + b\sigma_2 \\ i_2 &= i + a\sigma_2 + b\sigma_1 \end{aligned}$$

i étant l'indice de réfraction de la matière du modèle non chargé et a et b des constantes dépendant de cette matière.

La différence de phase à la sortie est la différence des chemins parcourus par la lumière, c'est-à-dire la différence des épaisseurs optiques :

$$\begin{aligned} e_1 &= i_1 e \\ e_2 &= i_2 e \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \Delta &= e_1 - e_2 = e(a\sigma_1 + b\sigma_2 - a\sigma_2 - b\sigma_1) \\ (35) \quad \Delta &= ke(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned}$$

k étant : $k = (a - b)$.

Si l'on ajoute à la connaissance de la direction des tensions principales et de leur différence, la valeur de leur somme, on aura évidemment tous les éléments nécessaires à la détermination complète de l'état de contrainte.

(1) On peut voir : V. TESAR. Photoélasticimétrie dans les constructions aéronautiques (*La Science Aérienne*, sept.-oct. 1933, p. 374).

VIII

DIFFÉRENTES PARTIES DE LA MÉTHODE PHOTOÉLASTICIMÉTRIQUE

a) En lumière polarisée rectilignement, on obtient les lignes « isoclines » ou lignes dont la propriété est qu'en chacun de leurs points les directions rectangulaires des contraintes principales sont parallèles aux plans de polarisation des nicols croisés. Par une simple construction géométrique on passe des lignes isoclines aux lignes isostatiques qui donnent les *directions des contraintes principales* dans tous les points du corps (1).

b) La *différence des contraintes principales* est donnée par les lignes « isochromatiques » ou lignes d'égale coloration, lieux géométriques des points où la différence des contraintes principales est constante. La biréfringence, à laquelle est proportionnelle la différence des contraintes, peut être mesurée par plusieurs méthodes de compensation qui calculent la différence de marche acquise par les deux rayons, produit du dédoublement du rayon originel en traversant le corps.

c) La *valeur individuelle des contraintes principales* peut être obtenue en calculant leur somme par des moyens mécaniques (Mesnager, Coker, etc.), ou bien par un des procédés qui conduisent directement à chacune de ces valeurs : l'intégration graphique, les procédés Favre, Fabry, Tesar, etc.

Donc, la partie exclusivement technique de la méthode photoélasticimétrique, en plus du calcul du modèle et de son dispositif de mise en charge, comprend 4 opérations :

1. — *Relever les lignes isoclines.*
2. — *Construire les isostatiques.*
3. — *Relever les isochromatiques.*
4. — *Calculer les contraintes principales individuelles.*

(1) Pour cette construction on peut voir : TESAR : article cité, p. 381.

M. G. DELANGHE. *Revue d'optique*, juin-juillet 1928 : La Photoélasticimétrie, p. 254.

Je laisserai ici complètement de côté la description des nombreux procédés que, suivant les différents cas, l'on peut employer surtout pour les opérations 3 et 4. Je renvoie le lecteur aux publications qui ont été déjà faites sur ce sujet (1). Je ne ferai que décrire en détail la méthode de compensation de M. Tardy et la méthode de l'intégration graphique employée par M. V. Tesar, parce que ce sont les deux procédés que j'ai employés, ensuite parce que, en général, jusqu'à présent, on les a traitées avec moins de détails.

(1) Voir la bibliographie qui est à la fin de ce travail.

IX

DESCRIPTION DE L'APPAREIL EMPLOYÉ

Essentiellement, la disposition de l'appareil est celle du schéma de la figure 15.

On trouve tout d'abord la *source lumineuse* qui peut être une lampe à vapeurs de mercure ou bien, comme dans le cas présent, une lampe à incandescence. On ajoute alors une lame colorée, pour obtenir la lumière monochromatique verte : $\lambda = 0,546 \mu$.

Puis vient le nicol *polariseur* après lequel la lumière de la source vibre seulement dans un plan. Cette lumière polarisée rectilignement traverse un « *mica quart d'onde* » dont la ligne neutre est située à 45° du plan des vibrations que laisse traverser le polariseur ; il transforme

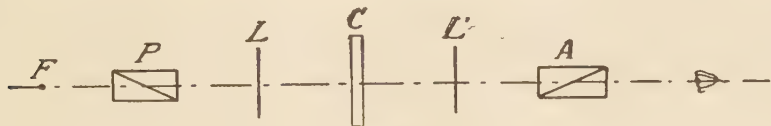


Fig. 15.

ainsi la vibration rectiligne en vibration circulaire. C'est cette lumière circulaire qui arrive au corps chargé, quand on veut relever les isochromatiques. Pour les isoclines, on enlève le mica et la lumière rectiligne arrive directement sur le corps.

(La lumière circulaire est employée pour l'avantage qu'il y a à se débarrasser des isoclines quand l'on veut relever les isochromatiques).

La lumière polarisée circulairement peut être considérée comme la résultante de deux composantes dont les vibrations sont rectilignes, normales entre elles, d'égales périodes et amplitude, mais avec une différence de phase égale à un nombre impair de fois $1/4$. Quand les vibrations composantes traversent le corps chargé, elles subissent un nouveau déphasage, proportionnel à la différence des contraintes principales agissant au point du corps qui est traversé par le rayon. En sortant du corps, la lumière est alors polarisée elliptiquement.

Le chemin suivi jusqu'ici par le rayon est indiqué de façon schématique par la figure 16.

Après le corps se trouve le *deuxième mica quart d'onde* dont les axes sont normaux à ceux du premier et qui redresse la lumière circulaire en lumière rectiligne en lui introduisant un nouveau dépha-

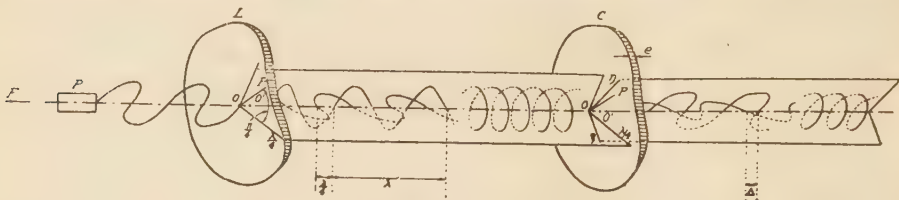


Fig. 16.

sage $\frac{\pi}{2}$. Ce mica, comme l'antérieur, peut être retiré du chemin de la lumière. Il y a finalement l'*analyseur* qui laisse passer seulement les vibrations qui se trouvent dans un plan perpendiculaire à son plan de polarisation. Il est constitué, ainsi que le polariseur, par un nicol et tous les deux, analyseur et polariseur, peuvent tourner ensemble autour de l'axe de tout le système, sans modifier leur position relative.

X

MÉTHODE EMPLOYÉE POUR LA MESURE DE LA BIRÉFRINGENCE ACCIDENTELLE (1)

La caractéristique fondamentale de ce procédé consiste dans le fait que l'analyseur peut tourner autour de son axe, indépendamment du polariseur : c'est l'analyseur même qui servira d'instrument pour la compensation de la biréfringence.

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE FONDAMENTALE

Je rappelle que, en appelant :

Δ la différence de marche des rayons dédoublés, exprimée dans la même unité de longueur que λ et e ,

λ la longueur d'onde de la vibration rectiligne monochromatique,

e l'épaisseur du corps soumis aux contraintes,

ψ la différence de marche des rayons dédoublés exprimée en radians, ou différence de phase,

δ la moitié de cette quantité,

i_1, i_2 les indices de réfraction du corps, pour les vibrations privilégiées,

σ_1, σ_2 les contraintes principales.

b la biréfringence,

on dispose des équations suivantes :

$$\Delta = (i_1 - i_2)e; \quad \Delta = ke(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\psi}{2\pi} = b; \quad \psi = 2\delta.$$

Par ailleurs, en appelant, de même :

a : l'amplitude,

T : la période,

(1) Voir : H. L. TARDY. Méthode pratique d'examen et de mesure de la biréfringence des verres d'optique (*Revue d'optique*, n° 2, 1929).

t : l'instant considéré,

ω : la fréquence $\frac{2\pi}{T}$

l'expression de la vitesse de l'oscillation lumineuse est :

$$v = a \cos \frac{2\pi}{T} t = a \cos \omega t$$

et l'intensité lumineuse sera :

$$I = \frac{1}{2} \rho V a^2$$

expression dans laquelle : ρ est la masse spécifique de l'éther et V la vitesse de propagation.

C'est-à-dire que : $I = k a^2$, proportionnel au carré de la vitesse maxima.

Les axes et la désignation des angles employés sont ceux de la figure 17.

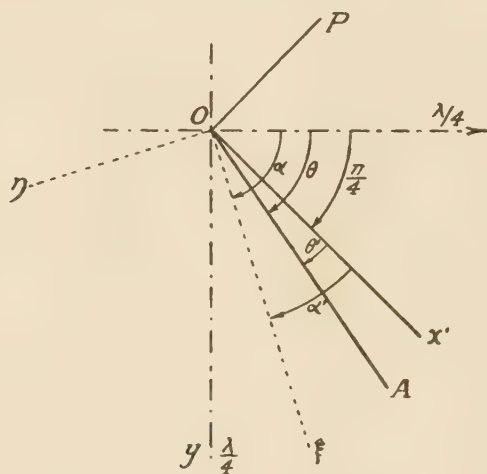


Fig. 17.

A et P sont les traces des plans dans lesquels se trouvent respectivement les vibrations que laissent passer le polariseur et l'analyseur. O_x et O_y sont les directions des lignes neutres des « quart-d'onde ».

$O\xi$, $O\eta$ les directions des contraintes principales du corps au point O considéré.

La lumière naturelle après avoir traversé le polariseur a comme équation :

$$v = a \cos \omega t.$$

Après avoir traversé la première lame « quart-d'onde » l'équation de lumière circulaire reste exprimée par celles de ses composantes :

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega t \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \omega t.$$

Les composantes selon ξ et η sont respectivement égales à celles de x et y .

Faisant $\frac{a}{\sqrt{2}} = a'$, après avoir traversé le corps les équations sont :

$$\xi = a' \cos (\omega t + \delta) \quad \eta = a' \sin (\omega t - \delta).$$

En arrivant au quart d'onde il résulte que les composantes ont l'expression :

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \quad y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$$

et après avoir traversé la deuxième lame quart-d'onde :

$$y = a' \cos \left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \alpha + a' \sin \left(\omega t - \delta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = a' \sin (\omega t + \delta) \sin \alpha - a' \cos (\omega t - \delta) \cos \alpha \\ x = a' \cos (\omega t + \delta) \cos \alpha - a' \sin (\omega t - \delta) \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\frac{x}{a'} = \cos \omega t \cos \delta \cos \alpha - \sin \omega t \sin \delta \cos \alpha - \sin \omega t \cos \delta \sin \alpha + \cos \omega t \sin \delta \sin \alpha$$

$$\frac{x}{a'} = \cos \omega t (\cos \delta \cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha) - \sin \omega t (\sin \delta \cos \alpha + \cos \delta \sin \alpha)$$

$$(a) \quad \frac{x}{a'} = \cos (\alpha - \delta) \cos \omega t - \sin (\alpha + \delta) \sin \omega t$$

$$\frac{y}{a'} = \sin \omega t \cos \delta \sin \alpha + \cos \omega t \sin \delta \sin \alpha - \cos \omega t \cos \delta \cos \alpha - \sin \omega t \sin \delta \cos \alpha$$

$$\frac{y}{a'} = \cos \omega t (\sin \delta \sin \alpha - \cos \delta \cos \alpha) + \sin \omega t (\cos \delta \sin \alpha - \sin \delta \cos \alpha)$$

$$(b) \quad \frac{y}{a'} = \cos \omega t \cos (\alpha + \delta) + \sin \omega t \sin (\alpha - \delta).$$

L'analyseur ne laisse passer que les vibrations contenues dans le plan OA, c'est-à-dire, qu'après ce nicol on ne trouvera que la somme des projections de (a) et de (b) sur OA :

$$x_a = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$\frac{x_a}{a'} = \cos (\alpha - \delta) \cos \omega t \cos \theta - \sin (\alpha + \delta) \sin \omega t \cos \theta -$$

$$- \cos (\alpha + \delta) \cos \omega t \sin \theta + \sin (\alpha - \delta) \sin \omega t \sin \theta$$

$$\frac{x_a}{a'} = \cos \omega t [\cos (\alpha - \delta) \cos \theta - \cos (\alpha + \delta) \sin \theta] -$$

$$- \cos \left(\frac{\pi}{2} + \omega t \right) [\sin (\alpha - \delta) \sin \theta - \sin (\alpha + \delta) \cos \theta].$$

Puisqu'il s'agit de deux vibrations qui ont même période et même direction on peut les composer d'après la règle de Fresnel. Ce qu'il s'agit d'obtenir, c'est l'intensité lumineuse reçue par l'œil après l'analyseur, le calcul va donc se limiter à celui de l'amplitude A de la vibration résultante, ou de la vitesse maxima, à laquelle est proportionnelle cette intensité.

$$I = [\cos(\alpha - \delta) \cos \theta - \cos(\alpha + \delta) \sin \theta]^2 + [\sin(\alpha + \delta) \cos \theta - \sin(\alpha - \delta) \sin \theta]^2$$

$$I = [(\cos \theta + \sin \theta) \sin \alpha \sin \delta + (\cos \theta - \sin \theta) \cos \alpha \cos \delta]^2 + [(\cos \theta + \sin \theta) \sin \delta \cos \alpha + (\cos \theta - \sin \theta) \sin \alpha \cos \delta]^2$$

$$I = (\cos \theta + \sin \theta)^2 \sin^2 \delta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\cos \theta - \sin \theta)^2 \cos^2 \delta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) \sin 2\delta \sin 2\alpha$$

$$I = [(\cos \theta + \sin \theta) \sin \delta + (\cos \theta - \sin \theta) \cos \delta]^2 - (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) \sin 2\delta + (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) \sin 2\delta \sin 2\alpha$$

$$I = [(\cos \theta + \sin \theta) \sin \delta + (\cos \theta - \sin \theta) \cos \delta]^2 - (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) \sin 2\delta(1 - \sin 2\alpha)^2$$

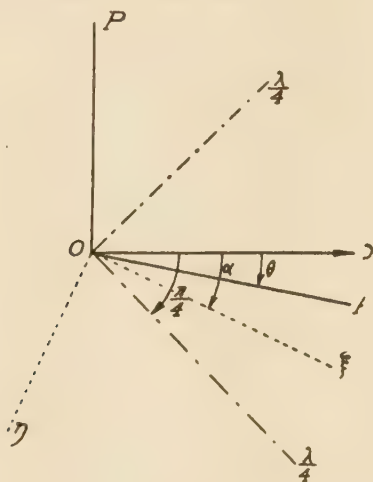


Fig. 18.

On effectue maintenant un changement d'axes. On prend Ox' qui est située à $\frac{\pi}{4}$ de l'axe antérieur, comme axe des x . Les nouveaux angles θ et α seront θ' et α' et les rapports entre les anciennes et les nouvelles mesures sont :

$$\theta' = \theta - \frac{\pi}{4}; \quad \alpha' = \alpha - \frac{\pi}{4},$$

$$\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta'; \quad \sin 2\alpha = \cos 2\alpha'$$

$$\cos \theta + \sin \theta = -\sqrt{2} \sin \theta'$$

en substituant dans la dernière expression de l'intensité l'on a :

$$I = [\sqrt{2} \cos \theta' \sin \delta - \sqrt{2} \sin \theta' \cos \delta]^2 + \cos \theta' \sin \theta' \sin 2\delta (1 - \cos 2\alpha')$$

$$I = [\sqrt{2} \sin \delta \cos \theta' - \cos \delta \sin \theta']^2 + \sin 2\theta' \sin 2\delta \cdot 2 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{I}{2} = \sin^2 (\delta - \theta') + \sin 2\theta' \sin 2\delta \sin^2 \alpha'.$$

Si l'on prend comme désignation des axes et des angles ceux qui sont indiqués dans la figure 18, l'intensité lumineuse reçue par l'œil, en fonction de la différence de phase 2δ et des angles que le polariseur fait avec l'analyseur et avec la direction des contraintes principales, est donnée par la formule suivante :

(36)

$$\boxed{\frac{I}{k} = \sin^2(\delta - \theta) + \sin 2\theta \sin 2\delta \sin^2 \alpha}.$$

APPLICATIONS DE LA FORMULE

a) *Supposons tout d'abord θ égal à zéro.*

L'équation se réduit à :

$$\frac{I}{k_1} = \sin^2 \delta,$$

ce qui signifie que l'intensité lumineuse est indépendante de l'angle α que forme l'origine des angles avec la direction des contraintes principales, ou, en d'autres termes qu'il sera possible de faire tourner ensemble l'analyseur et le polariseur sans que l'intensité lumineuse du point considéré change. On voit aussi que cette intensité est uniquement fonction de la différence de phase, et que quand la différence de phase est nulle, l'intensité correspondante est nulle aussi.

Par conséquent si l'on maintient les nicols croisés on verra obscurs tous les points pour lesquels $I = 0$, c'est-à-dire : $\sin^2 \delta = 0$; ou bien : $\delta = k\pi$.

Il est plus pratique d'observer tout un champ visuel déterminé, au lieu d'observer un seul point. Ainsi, on verra comme lignes obscures le lieu géométrique des points pour lesquels la différence de phase est $2\delta = 2k\pi$.

Puisque la biréfringence est :

$$b = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\Delta}{\lambda}$$

les points qui appartiennent aux lignes obscures sont ceux pour les-

quels la différence linéaire de phase est égale à un nombre entier de longueurs d'onde :

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi k}{2\pi} = k = b; \quad \Delta = k\lambda.$$

Il est relativement facile de connaître à quel ordre de longueurs d'onde appartiennent ces lignes en observant la situation des points singuliers et la coloration que présentent les lignes isochromatiques à la lumière blanche.

b) Supposons maintenant que θ ait une valeur θ_1 différente de zéro.

L'angle des deux nicols n'est plus un angle droit.

1. Faisons $\alpha = 0$, c'est-à-dire, le polariseur est parallèle à une des lignes des contraintes principales η .

$$\alpha = 0; \quad \frac{I}{k_1} = \sin^2 (\delta - \theta_1)$$

$$\delta = \theta_1; \quad \frac{I}{k_1} = \sin^2 (\theta_1 - \theta_1) = 0,$$

Par conséquent l'intensité sera nulle quand $\delta = \theta_1$.

On verra dans le champ visuel, comme ligne obscure, le lieu géométrique des points dont la différence de phase est $\psi = 2\theta_1$.

Avec un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour le cas $\theta = 0$, on voit que, puisque $\Delta = \frac{\lambda\psi}{2\pi}$, l'on a : $\Delta = \frac{\theta_1}{\pi}\lambda$. Par conséquent, la différence linéaire de phase des points qui apparaissent obscurs maintenant est donnée directement en parties de longueur d'onde, par l'angle dont α a tourné l'analyseur divisé par π .

Il est facile de comprendre que si la graduation de cet analyseur est établie de telle façon que 100 divisions correspondent à π on aura avec la simple lecture de l'angle θ_1 , la fraction de longueur d'onde à laquelle est égale la différence de phase de tous les points qui apparaissent obscurs.

La différence de phase que l'on lit de cette façon est celle qui correspond à la différence de contraintes principales $\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi}$, c'est-à-dire, que la contrainte de laquelle l'on soustrait est celle qui est parallèle à la section principale du polariseur.

2. Faisons $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Le polariseur est alors parallèle à l'autre des contraintes principales.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : \quad \frac{I}{k_1} = \sin^2 (\delta - \theta_1) + \sin 2\delta \sin 2\theta_1$$

$$\delta = -\theta_1 : \quad \frac{I}{k_1} = \sin^2 (-\theta_1 - \theta_1) - \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_1 = 0.$$

L'intensité lumineuse sera donc nulle dans les points où la différence de phase sera $\psi = -2\theta_1$.

Par conséquent, la valeur que l'on obtient est complémentaire de l'antérieure et, d'une façon analogue à celle du premier cas, elle correspond à la différence des contraintes principales $\sigma_z - \sigma_x$.

Pour obtenir le lieu des points où la différence des contraintes principales est constante il faut tourner ensemble les deux nicols. La ligne obscure qui est décrite dans le mouvement a comme valeur de la différence linéaire de phase la valeur de l'angle θ_1 de l'analyseur qui n'a pas changé pendant le mouvement.

Il est intéressant de faire remarquer qu'en plus de la position des nicols croisés, il y en a une autre encore pour laquelle les lignes obscures sont invariables par rapport à l'angle α . C'est quand la valeur θ_1 est égale à $\frac{\pi}{2}$. C'est-à-dire quand on lit 0,50 sur la graduation de l'analyseur. Cela correspond, d'après ce qui a été dit plus haut, à une différence de phase de une demi-longueur d'onde.

En effet, quand $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, l'équation se réduit à : $\frac{I}{k_1} = \cos^2\delta$ qui est indépendante de l'angle α .

On peut arriver au même résultat si l'on fait $\delta = \frac{\pi}{2}$, ce qui est d'accord avec le fait que les différences de phase se mesurent par l'angle dont a tourné l'analyseur, et dont la valeur est lue sur la graduation correspondante. Tout cela se déduit aussi du fait que les valeurs δ et θ sont symétriques dans l'équation fondamentale.

TECHNIQUE DE LA MÉTHODE

Supposons que les opérations préliminaires aient été déjà réalisées. Dessin d'un quadrillage à l'encre de Chine sur le modèle, et d'un quadrillage semblable (à une échelle déterminée) sur le papier. Les isoclines ont été déjà relevées, et on a construit les isostatiques. Le corps est situé de façon qu'il soit traversé par le faisceau de lumière polarisée circulairement.

1. — Avec les nicols croisés, $\theta = 0$, et avec une position quelconque des nicols par rapport au corps, $\alpha = x$, on dessine sur le papier toutes les lignes obscures que l'on observe dans le modèle. Les points singuliers, que l'on connaît déjà par les lignes isoclines et isostatiques, sont

les points dans lesquels la différence des contraintes principales, et par conséquent la différence linéaire de phase, est nulle. Les lignes sont, en ordre croissant, les lieux géométriques des points où la différence linéaire de phase est : λ , 2λ , 3λ , etc.

2. — On tourne maintenant l'analyseur jusqu'à la position 0,50, la position absolue des nicols pouvant toujours être quelconque par rapport au corps. On dessine les lignes observées qui seront les lignes lieux géométriques des points où la différence de phase Δ est : $1/2 \lambda$, $1 \frac{1}{2} \lambda$, $2 \frac{1}{2} \lambda$, etc.

3. — On place l'analyseur successivement dans les positions intermédiaires : 0,20, 0,30, 0,60, etc. Ces positions seront plus ou moins espacées selon le degré de précision voulu et les circonstances particulières de chaque cas. Une fois fixée l'une de ces positions de l'analyseur on fait tourner les deux nicols ensemble et l'on dessine les lignes obscures qui apparaissent à mesure que l'on effectue la rotation. On désignera chacune de ces lignes avec un indice, représentant la valeur de l'angle que formait l'analyseur quand elle fut obtenue.

Ainsi toute la surface du corps est couverte par des lignes qui représentent les lieux géométriques des points d'égale différence de contraintes principales. Ces lignes varient d'une façon continue ce qui rend plus facile leur tracé.

Si l'on veut connaître la différence de phase Δ dans un point particulier, sans calculer tout le champ côté de la différence de contraintes, il suffit de placer le plan de la section principale du polariseur parallèle à une des isostatiques qui passent par le point, fixer l'ensemble, et faire tourner ensuite l'analyseur tout seul jusqu'à ce qu'une des lignes obscures passe exactement par le point considéré. On lit ensuite l'angle que forme l'analyseur dans cette position.

RÈGLE POUR LA DÉTERMINATION DES SIGNES

On trouve quelquefois des difficultés à connaître le signe de la différence de contraintes que l'on a mesurée.

Pour faciliter le problème il est avantageux de représenter comme positives toutes les valeurs des différences de contraintes. Mais ces valeurs se rapporteront à $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ou à $(\sigma_2 - \sigma_1)$ selon que le fil du polariseur (fil qui sert à matérialiser la trace du plan dans lequel se trouvent les vibrations qu'il laisse passer) est parallèle à l'isostatique I_1 ou à l'isostatique I_2 , et si l'on fait tourner toujours l'analyseur vers la droite, dans le sens des aiguilles d'une montre.

XI

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE POUR LE CALCUL DES VALEURS INDIVIDUELLES σ_1 ET σ_2

On peut arriver aux valeurs de σ_1 et σ_2 soit par des procédés mécaniques qui donnent leur somme (Mesnager, Coker), soit par des procédés exclusivement optiques (Favre, Fabry, Tesař).

En employant ces méthodes on rencontre quelquefois des difficultés d'ordre pratique assez considérables.

Pour beaucoup de cas il y a une autre méthode, celle de l'intégration graphique, qui offre plus d'avantages. Ce procédé consiste dans le calcul des valeurs des contraintes principales en se basant exclusivement sur leur direction et sur la valeur de leur différence ; c'est-à-dire en partant uniquement des isostatiques et des lignes d'égale différence de contraintes.

Pour cela on effectue une intégration qui avait été déjà conçue par Maxwell et qui est maintenant devenue d'usage pratique grâce à quelques simplifications.

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE

Considérons un élément superficiel générique en équilibre, limité par deux groupes d'isostatiques (fig. 19).

σ sont les contraintes ; r les rayons de courbure, ds les éléments d'isostatique et $d\varphi$ l'angle au centre. Les indices sont ceux qui correspondent à la figure.

Puisque l'élément est en équilibre la projection sur O_1A et O_2A , tangentes aux isostatiques, doivent être telles que leur somme algébrique soit nulle.

On va effectuer ces projections par parties :

1. — *Projection sur O_1A .* — a) Projection des forces qui agissent sur AB et CD .

Sachant que :

$$d\varphi = \frac{ds_1}{r_1},$$

et appelant M cette projection l'on a :

$$\begin{aligned} M &= -\sigma_2 ds_1 + \left(\sigma_2 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} ds_2\right) (ds_1 + ds_2 d\varphi) = \\ &= -\sigma_2 ds_1 + \sigma_2 ds_1 + \sigma_2 ds_2 \frac{ds_1}{r_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} ds_2 ds_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$M = ds_1 ds_2 \left(\frac{\sigma_2}{r_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} \right),$$

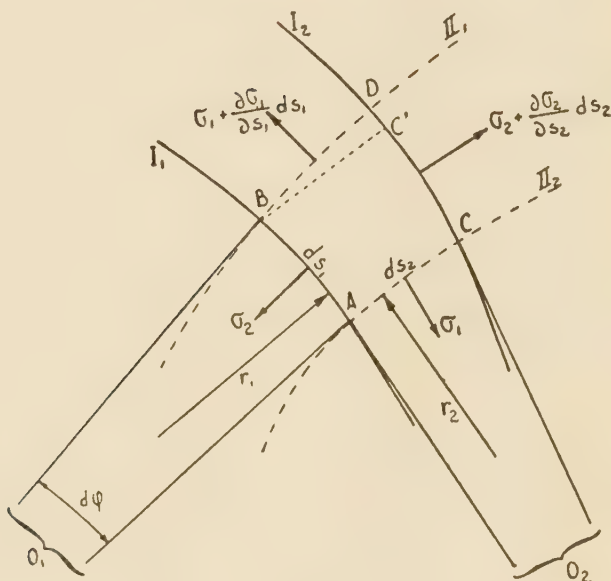


Fig. 19.

b) Projection des forces qui agissent sur AC et BD .

Appelons N cette projection.

Désignant par ΔF la force qui agit sur AC, et ayant présent la figure 20 on a :

$$N = -\Delta F \cdot d\varphi ; \quad N = -\sigma_1 ds_2 \frac{ds_1}{r_1}.$$

c) Somme de M et N :

$$\begin{aligned} ds_1 ds_2 \left(\frac{\sigma_2}{r_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} \right) - ds_1 ds_2 \frac{\sigma_1}{r_1} &= 0 \\ (37) \quad \frac{\sigma_2}{r_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} - \frac{\sigma_1}{r_1} &= 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r_1}. \end{aligned}$$

2. — *Projection sur O_2A .* — Avec un développement complètement analogue on arrive à l'expression :

$$(38) \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r_2}.$$

On obtient ainsi la valeur de σ_1 et de σ_2 exprimée par les intégrales suivantes :

$$(39) \quad \begin{cases} -\sigma_1 = \frac{1}{r_2} \int (\sigma_1 - \sigma_2) ds_1 \\ -\sigma_2 = \frac{1}{r_1} \int (\sigma_2 - \sigma_1) ds_2, \end{cases}$$

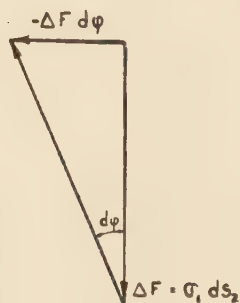


Fig. 20.

équations qui, comme il est évident, donnent les valeurs des contraintes principales en fonction uniquement de leur différence et du rayon de courbure des isostatiques.

CALCUL DES RAYONS DE COURBURE

On connaît, dans les expressions qui donnent σ_1 et σ_2 , la différence $(\sigma_1 - \sigma_2)$, il ne faut chercher maintenant, pour le point considéré, que la valeur du rayon de courbure de l'isostatique normale à celle le long de laquelle l'on fait l'intégration.

Soient, dans la fig. 21 les isostatiques I_1 et II_2 et les isoclines φ_0 et φ_1 . Il faut calculer le rayon r_2 au point 5.

On mesure sur la tangente à II_2 la distance Δs entre les isoclines φ_0 et φ_1 , de telle façon que les distances de chacune des isoclines au point considéré soient à peu près égales. (Etant donné qu'il s'agit d'une construction graphique l'on travaille avec des valeurs moyennes). Au point de vue pratique on peut réaliser la mesure facilement en super-

Quelquefois, étant donnée la position relative des isostatiques et des isoclines, il est très difficile de bien mesurer la distance Δs .

Dans ce cas on la calcule de la façon suivante (fig. 22) :

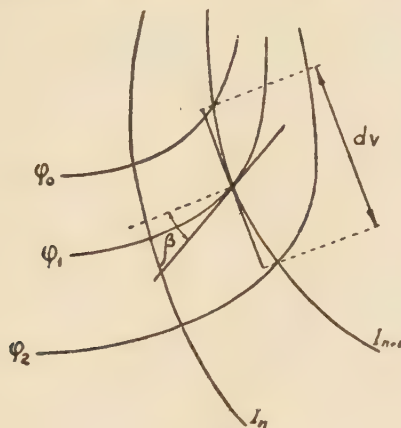


Fig. 22.

On mesure dv sur la tangente à l'isostatique le long de laquelle l'on intègre et de l'une à l'autre des isoclines qui sont de chaque côté du point considéré. On dessine l'isocline qui passe par ce point (l'interpolation est suffisante pour ce tracé) et l'on mesure l'angle β que forme la tangente à cette isocline avec la normale à l'isostatique.

On a ainsi :

$$(41) \quad \Delta s = \frac{dv}{\operatorname{tg} \beta}.$$

PROCÉDÉ D'INTÉGRATION (1)

L'une des isostatiques, le long de laquelle on veut effectuer l'intégration, et que j'appellerai I_1 , est divisée en parties égales, de 1 cm. par exemple.

Dans un graphique à part, on porte ces parties dans leur ordre respectif, et sur une ligne d'abscisses (fig. 23).

On donne aux ordonnées des valeurs équivalentes à celles de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ dans une échelle déterminée. (S'il s'agissait d'une isostatique I_2 , ce seraient les valeurs de $(\sigma_2 - \sigma_1)$). On porte donc, comme ordonnée, sur chaque point de l'isostatique, la différence des contraintes principales correspondante.

(1) Le procédé d'intégration que je décris ici est celui qu'emploie M. TESAR au Laboratoire de l'École Nationale des Ponts et Chaussées de Paris.

Considérons la valeur $(\sigma_1 - \sigma_2)$ comme moyenne d'une zone dont la longueur est égale à la distance à laquelle se trouvent les points. Admettons que la valeur σ_1 dans ce point soit connue.

Par le point M, extrémité de $(\sigma_1 - \sigma_2)$, on porte une parallèle à l'axe des abscisses, de longueur r_2 , et dont le sens soit dirigé vers le centre de courbure de l'isostatique de la famille normale. On relie l'extrémité de r_2 avec la base de $(\sigma_1 - \sigma_2)$, point 5 considéré. Cette nouvelle ligne forme avec r_2 l'angle α .

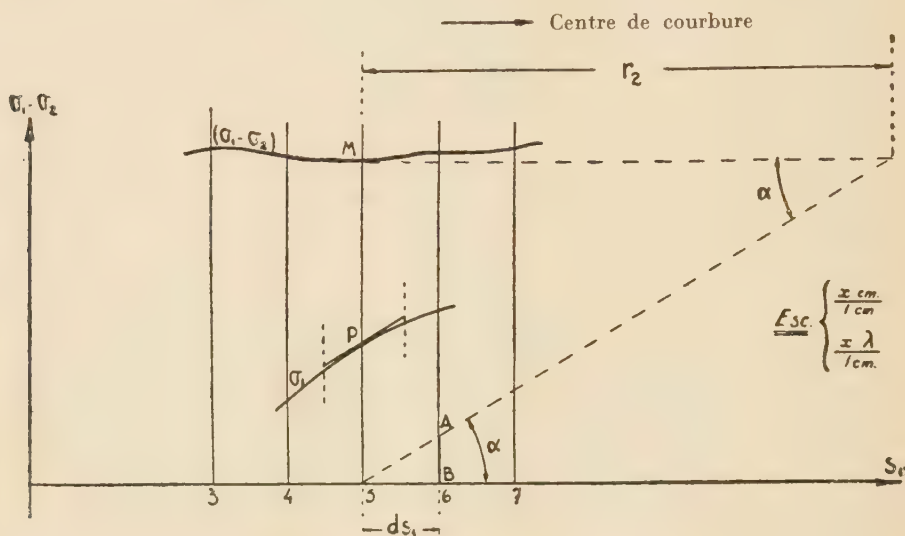


Fig. 23.

On porte une parallèle à cette ligne par le point P, extrémité de l'ordonnée correspondante au point 5, représentative de la valeur de σ_1 , et on étend cette parallèle le long de la zone de 1 cm. que l'on considère.

Cette parallèle est la tangente au point P à la courbe représentative de σ_1 .

En effet :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{ds_1}$$

$$\int \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} ds_1 = \int \frac{AB}{ds_1} ds_1,$$

et par la formule (4) :

$$-\sigma_1 = AB + k.$$

La valeur k , qui est la valeur $\overline{P-5}$, est toujours connue parce que,

ou bien l'on part d'un bord libre et alors elle est nulle, ou bien l'on part d'un point qui est déjà connu par une autre intégration.

La pente de σ_1 sera positive ou négative selon que r est dirigé dans le sens des abscisses positives ou inversement.

La valeur de σ_1 aura le même signe que $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ou le contraire selon qu'elle se trouve du même côté de l'axe des abscisses, ou du côté contraire.

VÉRIFICATION

On peut contrôler l'exactitude des intégrations réalisées en vérifiant qu'aux points d'intersection des isostatiques, on est arrivé aux mêmes valeurs de σ_1 et de σ_2 . En outre, une fois arrivé à un bord libre, la contrainte normale à ce bord, doit être nulle.

CAS PARTICULIERS

Si $r = \infty$; $\sigma_1 = 0 + k$: c'est-à-dire la tangente est parallèle aux abscisses.

Si $r = 0$ et $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ l'expression intégrale reste indéterminée.

L'indétermination est évitée de la façon suivante :

Dans la formule (38) on divise le numérateur et le dénominateur du deuxième membre par ds_1 :

$$\frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{ds_1}}{\frac{r_2}{ds_1}} = - \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1}$$

et en intégrant l'on a :

$$- \sigma_1 = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{ds_1}}{\frac{r_2}{ds_1}} ds_1.$$

Dans la construction graphique on fait, par commodité, ds_1 égal à l'unité. Il suffit donc de mesurer à la distance ds_1 les segments déterminés par la tangente aux courbes représentatives de r et de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ et en faire le quotient. Ce quotient, sur la même quantité unitaire ds_1 , donne la pente de la tangente à σ_1 au point considéré.

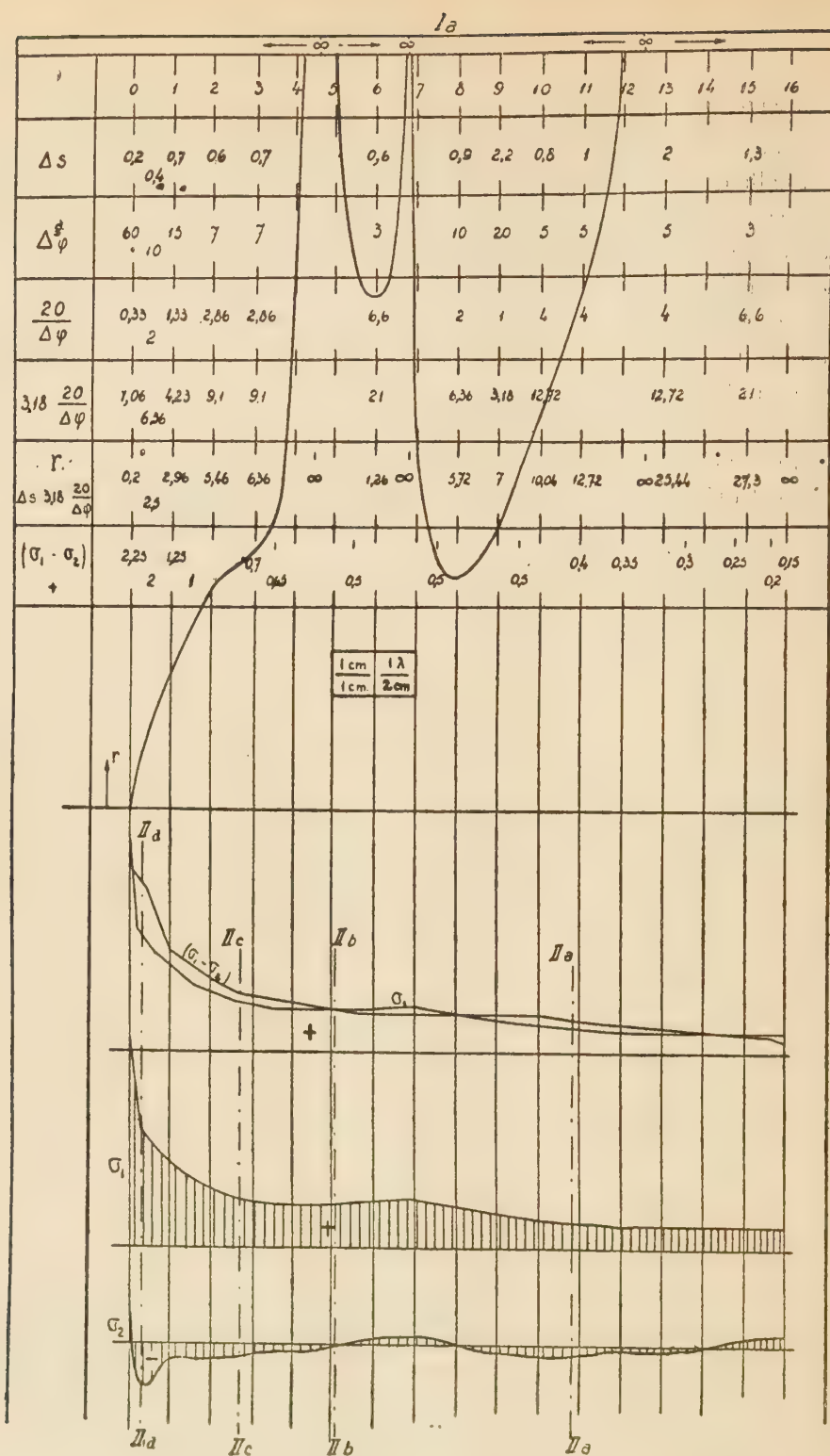


Fig. 24.

EXEMPLE :

Une forme assez pratique pour conduire les calculs de l'intégration est celle qui est présentée dans la figure 24.

Les courbes de la partie supérieure représentent les rayons de courbure. Il est avantageux de les dessiner pour rectifier de possibles erreurs de calcul.

Les chiffres représentés entre les colonnes qui correspondent aux points 0 et 1, sont ceux d'un point intermédiaire qui a été calculé, pour obtenir une plus grande exactitude, à cause des grandes variations de valeurs des contraintes dans cette zone.

Les verticales discontinues Π_a , Π_b , Π_c , Π_d , correspondent aux intersections avec les isostatiques normales et servent de contrôle.

XII

ESSAI DU MODÈLE

Le but principal de l'essai photoélasticimétrique de la pièce de « béton traité », étudiée dans la première partie, est de connaître d'une façon un peu plus exacte les véritables distributions et intensités des contraintes. Dans toute la première partie j'ai fait des calculs qui étaient basés sur des hypothèses. Plusieurs de ces hypothèses ont été — pour certains cas et au dedans de certaines limites — expérimentalement confirmées (1). Mais il y a toujours des zones, surtout aux approches des charges, où les lois de la résistance des matériaux ne suivent pas rigoureusement les faits. Pour les pièces en béton il y a un intérêt spécial à connaître aussi exactement que possible l'intensité et la direction des contraintes dans ces zones, à cause de la très petite résistance du béton aux efforts de traction et de cisaillement.

L'essai photoélasticimétrique va donner dans ce cas un aperçu général complet, intéressant et rationnel de la distribution des contraintes dans toute la pièce, mais il ne sera pas non plus exact en ce sens que l'essai du modèle ne réalise pas rigoureusement les conditions dans lesquelles se trouve la pièce en béton. Dans l'essai photoélasticimétrique, j'agis avec un matériau homogène, le verre, la pièce réelle est constituée par un matériau hétérogène, le béton armé. Dans le modèle, les charges de précontrainte sont appliquées en un point ; dans la pièce réelle, il peut y avoir plusieurs types de têtes en béton, ou bien une partie peut être transmise par adhérence le long de la barre. Il faudra donc aussi faire certaines hypothèses simplificatrices et demander *surtout* à l'expérience un critérium pour la distribution des fers secondaires (étriers) qui feront face aux cisaillements en soumettant même, si c'est nécessaire, le béton à des précontraintes transversales pour augmenter sa résistance (2).

(1) Voir, entre autres publications : A. MESNAGER. *Détermination expérimentale des efforts intérieurs dans les solides*, chap. iv, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

(2) Voir E. FREYSSINET. Edition : *Travaux de Science et Industrie*, juin 1935, p. 201 ; *Id.*, juin 1933, p. 11.

Pour les courbes intrinsèques : A. CAQUOT. *Mémoires et Compte Rendu de la Société*

L'essai photoélasticimétrique a été réalisé avec une pièce prismatique en verre. Ses dimensions sont : 27 cm. $\times$ 3 cm. $\times$ 1,4 cm.

Les précontraintes ont été signifiées par des compressions longitudinales. On a fait deux groupes d'essais.

$$m = \infty \quad \text{et} \quad m = 3.$$

L'effet des charges transversales que la pièce est destinée à supporter a été obtenu en la soumettant à une flexion transversale par des charges qui ont été placées dans différentes positions : $1/3$, $1/2$ de l'écartement des appuis, ou une distance de l'appui égale à la hauteur.

Les charges et les appuis agissaient sur une surface de la pièce de 1 cm. de longueur (visible).

La longueur de la pièce soumise à la flexion n'a été que de 21 centimètres (sept fois la hauteur), le reste a été laissé en porte à faux pour mesurer l'intensité de la charge longitudinale.

La valeur de la charge transversale est donnée par un petit prisme de 1 centimètre de largeur (visible) et 3 centimètres de hauteur. On peut considérer que dans la partie centrale de ce prisme, la distribution des contraintes est uniforme et que leur mesure donne l'intensité de la force transversale. On obtient cette mesure directement par la lecture de la biréfringence étant donné que la largeur est de *un* centimètre.

L'unité avec laquelle la force est mesurée est : λ cm. En effet, λ est une longueur d'onde. Soit la force M (à peu près 250 kg/cm² pour le verre), la force nécessaire et suffisante pour produire une différence de marche des rayons d'une longueur d'onde. On pourra établir une correspondance entre les forces et le nombre de longueurs d'onde de différence de marche produit par ces forces. $P \lambda$ cm équivaut donc à PM kg/cm² centimètre visible (pour le verre 250 P kg/cm²), en remplaçant λ par son équivalent M.

La disposition de l'appareil pour la mise en charge de la pièce est celle qui est indiquée dans la figure 25.

Les planches I, II et III se rapportent au premier groupe d'essais, pour lesquels $m = \infty$. Elles correspondent respectivement aux positions $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{3}$ et h de la charge transversale, comptées vers la gauche du deuxième appui.

d'Ingénieurs Civils de France, sept.-octob. 1933, p. 1088.

A. CHAULET, *La Technique des Travaux*, avril et juin 1933.

CHALOS. Déjà cité (*Annales des Ponts et Chaussées*, juillet 1935, p. 76).

Et le *Règlement de la Chambre Syndicale de Constructeurs en Ciment armé*. Gauthier-Villars, Paris, 1934.

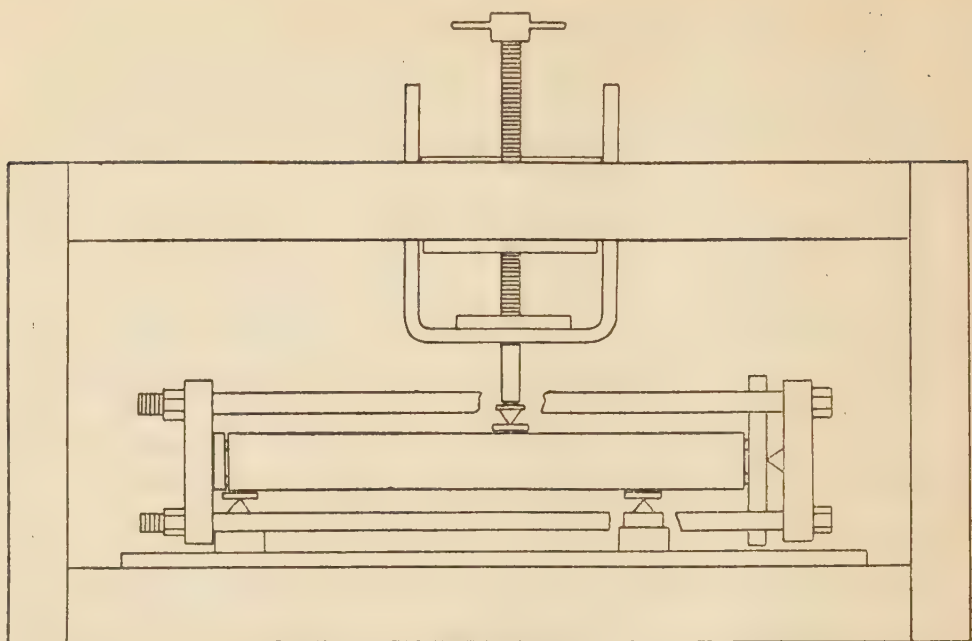


Fig. 25.

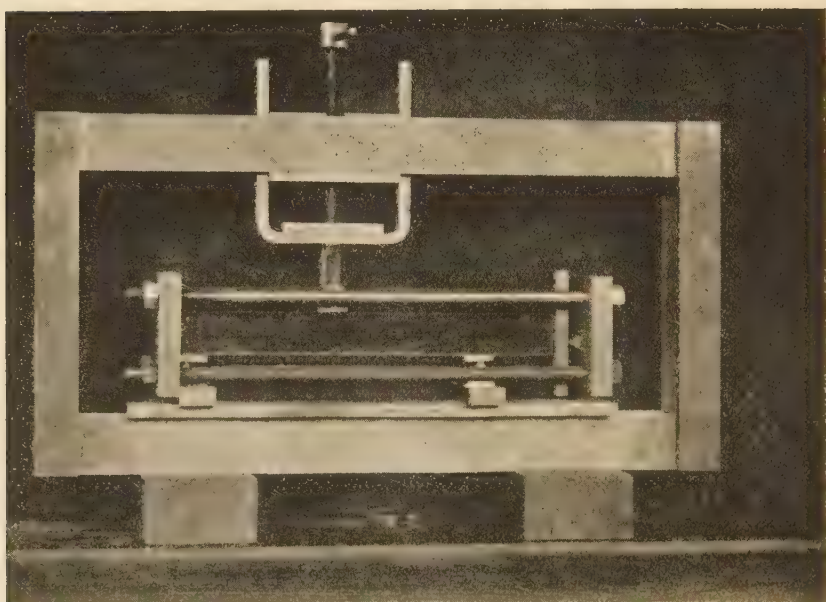


Fig. 25 bis.

La charge longitudinale est $P = 0,85 \lambda \text{ cm}$.

Pour la pièce en béton traité, avec $m = \infty$, le moment fléchissant transversal à supporter est de 1.910.000 kg-cm. Si l'on suppose pour cette pièce un écartement des appuis égal à 7 fois la hauteur (le même rapport que pour le modèle en verre), sa longueur sera : $0,90 \times 7 = 6,30 \text{ m}$. Avec cet écartement des appuis, la force concentrée au milieu qui produit le moment fléchissant $\mathcal{M} = 1.910.000 \text{ kg-cm}$, est $D = 12.120 \text{ kg}$.

Le rapport $\frac{P}{D}$ entre la force de précontrainte et la force transversale concentrée a été maintenu le même pour l'essai photoélasticimétrique. J'ai fixé ainsi $D = 0,45 \lambda \text{ cm}$.

Pour chacun des essais I, II et III, les planches 1 représentent les isoclines, les 2 les isostatiques et les 3 les isochromatiques.

L'essai II, qui correspond à la position $\frac{l}{3}$ de la charge D, a été mené jusqu'à l'obtention des valeurs individuelles de σ_1 et σ_2 par l'intégration graphique. Ces valeurs figurent dans les planches II-4 et II-5 respectivement. Pour tous les autres cas on s'est limité au calcul des isoclines, isostatiques et isochromatiques.

Les planches IV et V se rapportent au deuxième groupe d'essais, pour lesquels $m = 3$. Elles correspondent respectivement aux positions $\frac{l}{2}$ et $\frac{l}{3}$ de la charge transversale, comptées toujours vers la gauche du deuxième appui.

Dans le premier groupe d'essais $0,85 \lambda \text{ cm}$ représentaient 23,200 kilogrammes, c'est-à-dire : $\frac{10.000 \text{ kg}}{0,3695 \lambda \text{ cm}}$, dans le deuxième groupe d'essais j'ai choisi un sixième de cette proportion, pour ne pas faire dépasser au verre son taux de fatigue admissible. Il n'y a là-dessus aucun inconvénient pourvu que l'on maintienne le même rapport $\frac{P}{D}$ dans l'essai photoélasticimétrique, que dans la pièce en béton.

La précontrainte totale qui dans la pièce en béton est $R = 202.700 \text{ kilogrammes}$, sera pour la pièce en verre :

$$R = \frac{202.700 \text{ kg}}{6} \cdot \frac{0,3695 \lambda \text{ cm}}{10.000 \text{ kg}} = 1,24 \lambda \text{ cm}.$$

En appliquant la formule de la flexion composée :

$$\sigma_{1-2} = \frac{R}{F} \pm \frac{R \cdot e}{W},$$

où

$$F = 3,0 \text{ cm}^2; \quad W = 1,5 \text{ cm}^3$$

$$e = \frac{17,3 \text{ cm}}{30} = 0,577 \text{ cm},$$

on obtient :

$$\sigma_1 = + 0,89\lambda; \quad \sigma_2 = + 0,06\lambda,$$

ce qui est largement admissible pour le verre.

En faisant un raisonnement analogue à celui du cas où $m = \infty$, on trouve pour la charge transversale $D = 61.700$ kilogrammes, et pour l'essai :

$$D = \frac{61.700 \text{ kg}}{6} \cdot \frac{0,3695 \lambda \text{ cm}}{10.000 \text{ kg}} = 0,38 \lambda \text{ cm}.$$

Comme pour le premier groupe d'essais, les planches 1 correspondent aux lignes isoclines ; les planches 2 aux lignes isostatiques et les 3 aux isochromatiques.

Pour représenter plus facilement les isoclines j'ai employé un tracé conventionnel, le même que M. TESAR emploie couramment au Laboratoire des Ponts et Chaussées.

Chacune des familles des lignes isostatiques, pour une plus grande clarté aussi, a été représentée différemment : l'une par des traits pleins, l'autre par des traits discontinus.

Il faut remarquer pour l'interprétation des observations faites dans les zones immédiatement proches des points où les charges sont appliquées, que les charges dans le modèle n'arrivent jamais exactement jusqu'au bord, mais elles se maintiennent à une distance d'environ 1 millimètre de ce bord, cette limitation étant imposée par la nature même du verre. D'ailleurs, c'est aux points très proches de ceux où les charges sont appliquées que les difficultés de lecture augmentent. Cependant, les résultats consignés pour ces zones, dans les essais ici étudiés, n'ont pas un intérêt primordial, étant donné que la transmission de la charge longitudinale ne se fera pas probablement dans la pièce en béton dans des conditions rigoureusement les mêmes que celles prévues pour le modèle.

Les isostatiques du deuxième groupe d'essais montrent la régularité extraordinaire de la distribution des tensions dans les pièces qui ont des doubles précontraintes. Une des familles isostatiques est presque constamment parallèle à la direction des forces longitudinales, l'autre

presque constamment normale. Les inflexions dans la proximité des charges sont insignifiantes aussi.

NOTA. — Généralement, on représente les points où se croisent des

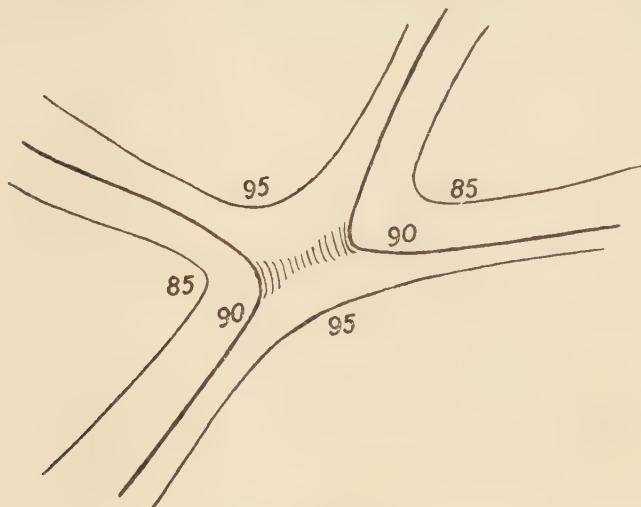


Fig. 26.

lignes isoclines ou isochromatiques, par des zones hachurées, comme l'indique la figure 26.

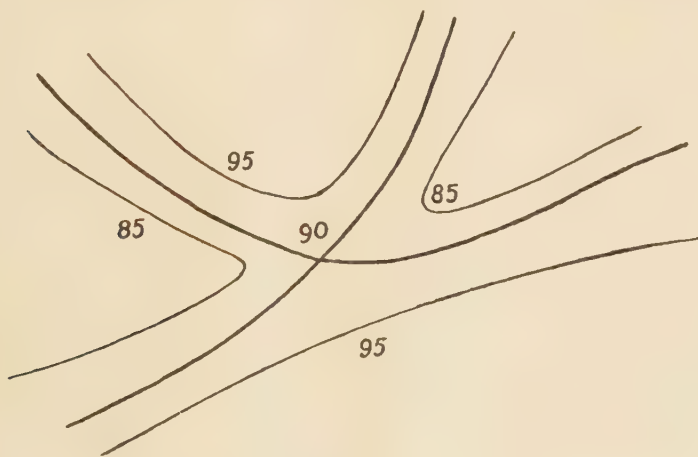


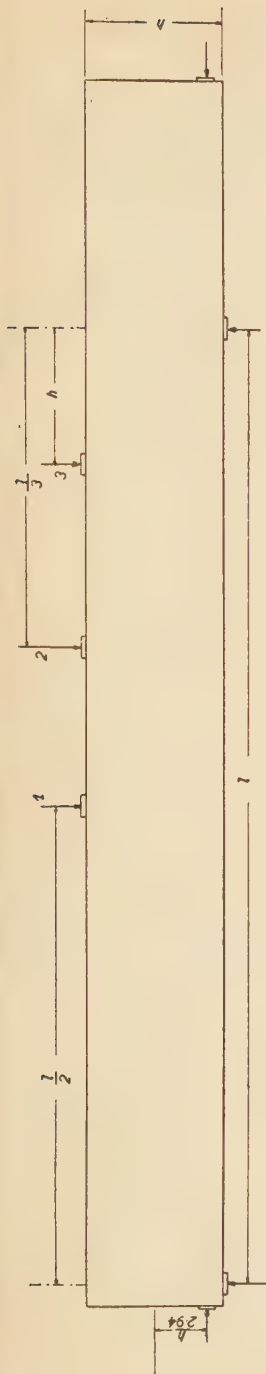
Fig. 27.

C'est ainsi que le phénomène est observé expérimentalement. L'appareil ne permet pas, en général, de déterminer avec exactitude quel est le point de rencontre des deux lignes. Ces deux lignes cependant, certainement elles s'entrecroisent. Bien que le point de leur rencontre

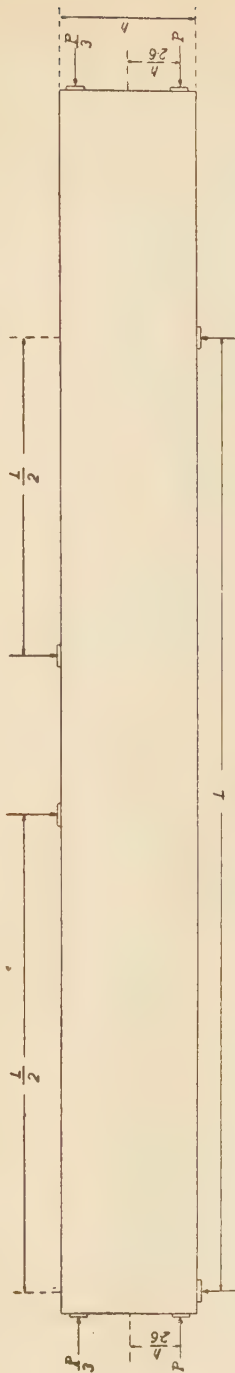
ne soit pas exactement connu, j'ai représenté ces lignes, comme l'indique la figure 27.

Cela donne une plus grande continuité à l'aspect général du dessin et au point de vue pratique, étant donné l'ordre de grandeur des erreurs de l'observation expérimentale, il n'y a aucune différence.

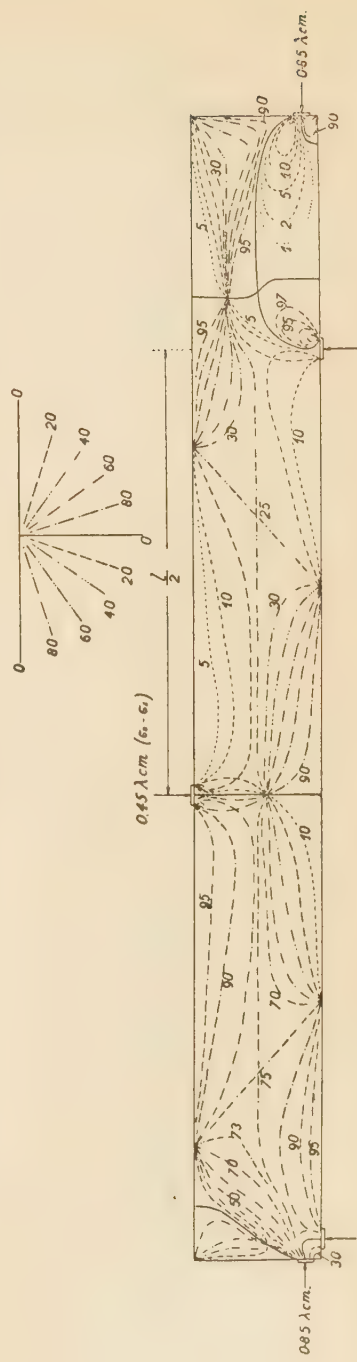
0-1.



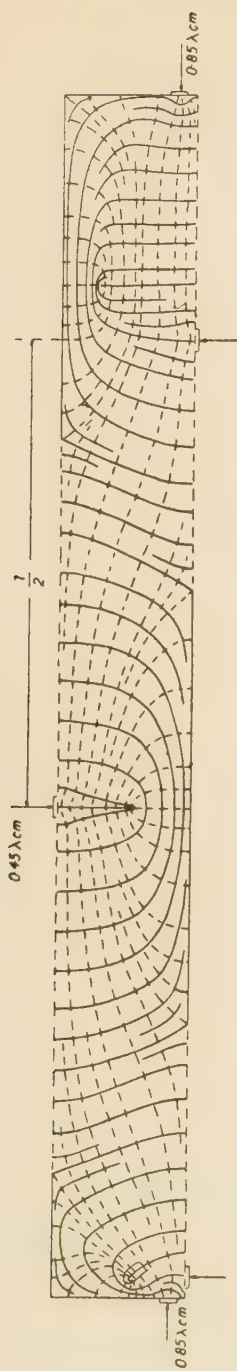
0-2.



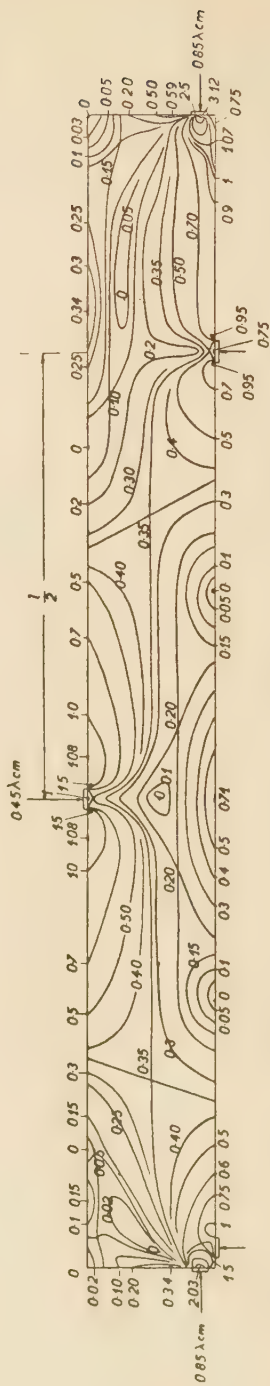
I-1,



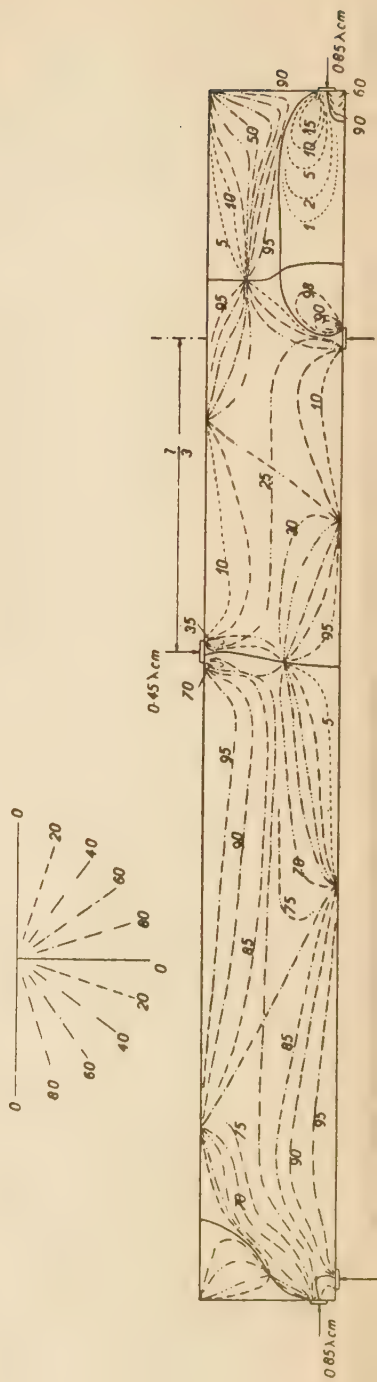
1-2.



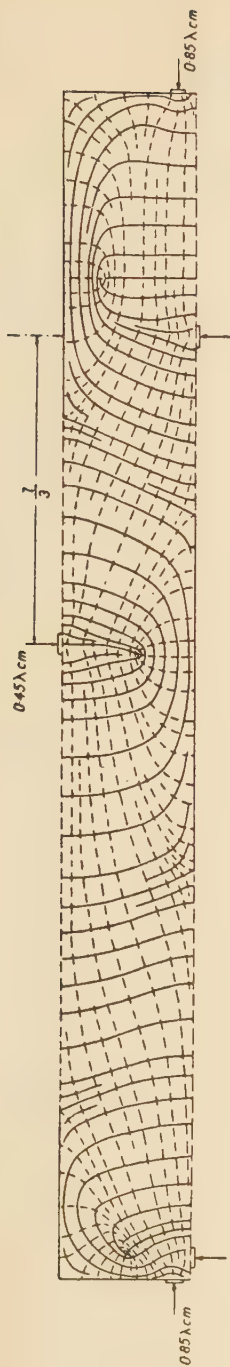
I-3.



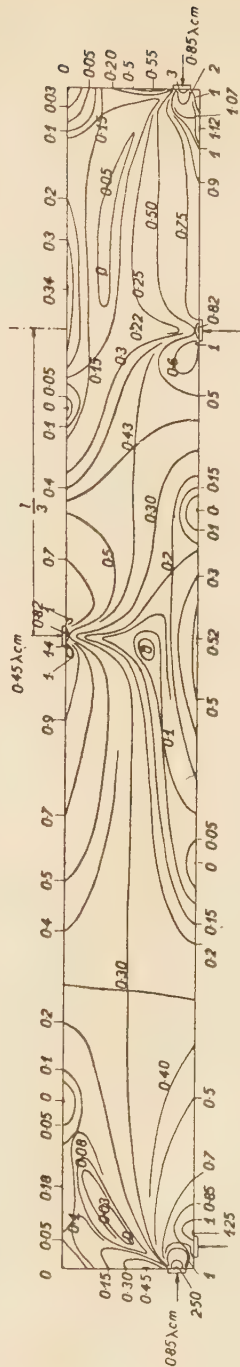
II-1.



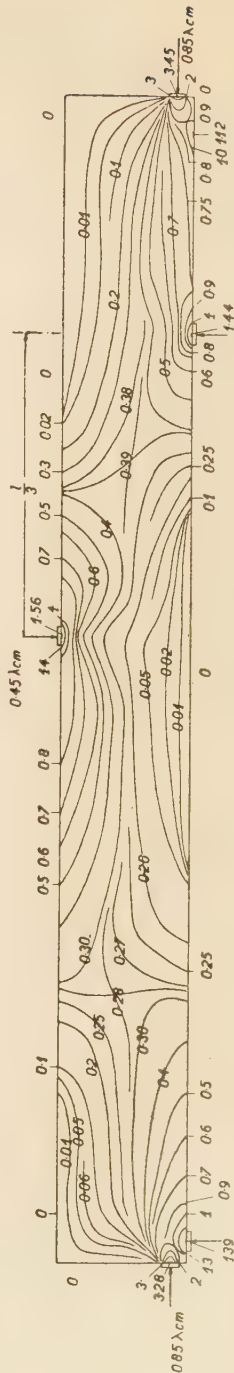
II-2.



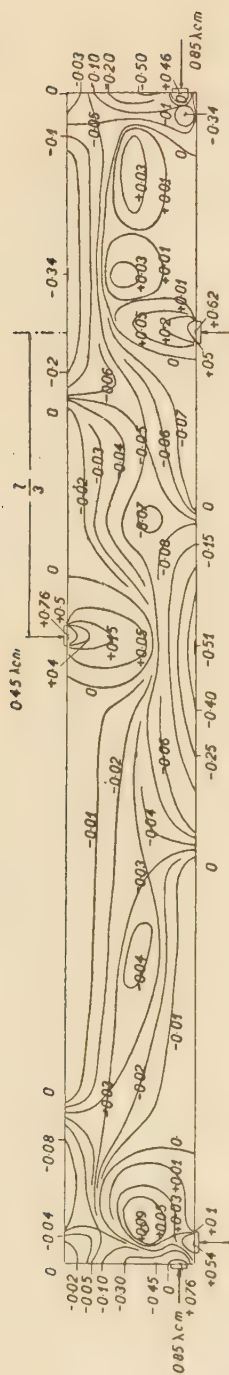
II-3.



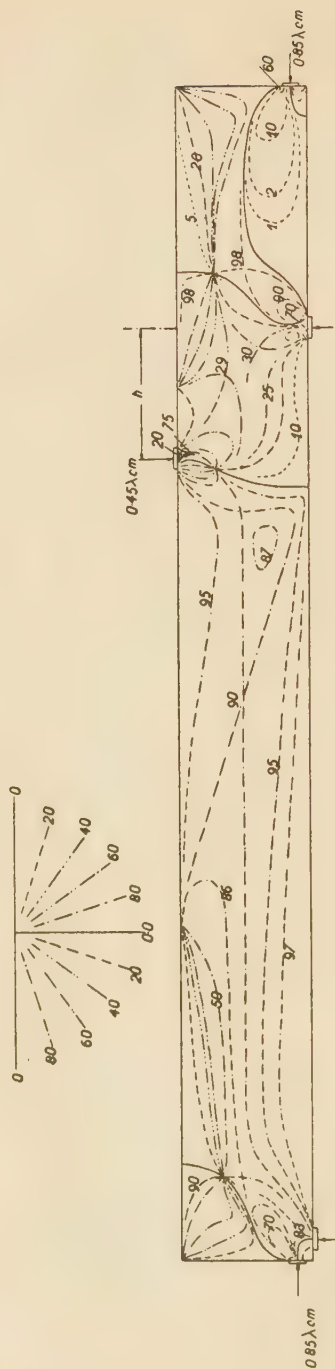
σ_1 - II-4.



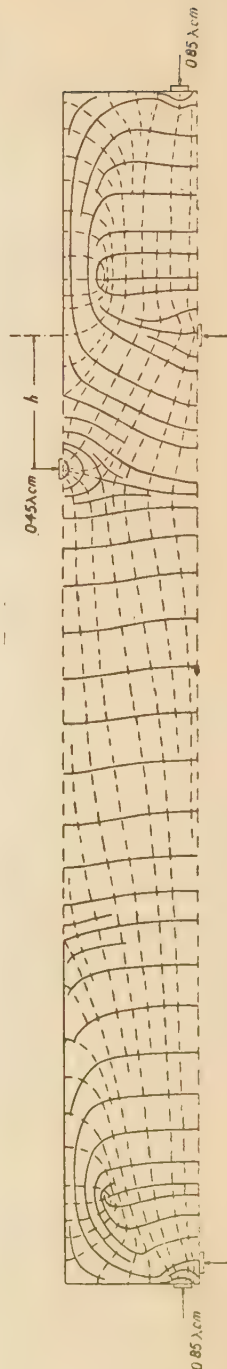
σ₂-II-5.



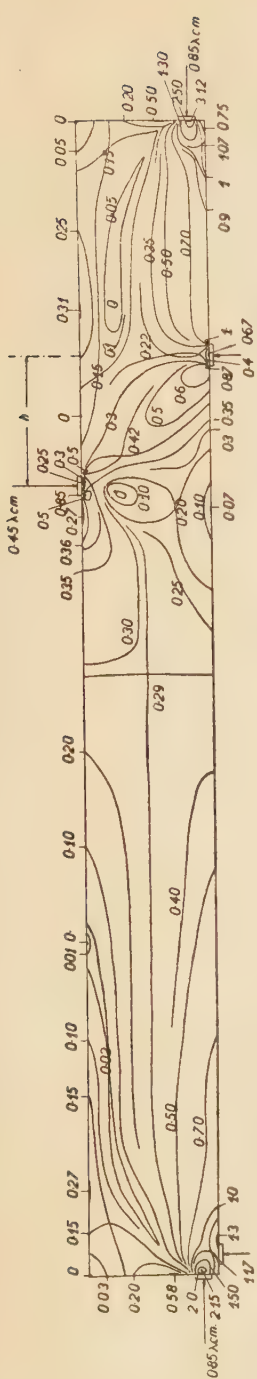
III-1.



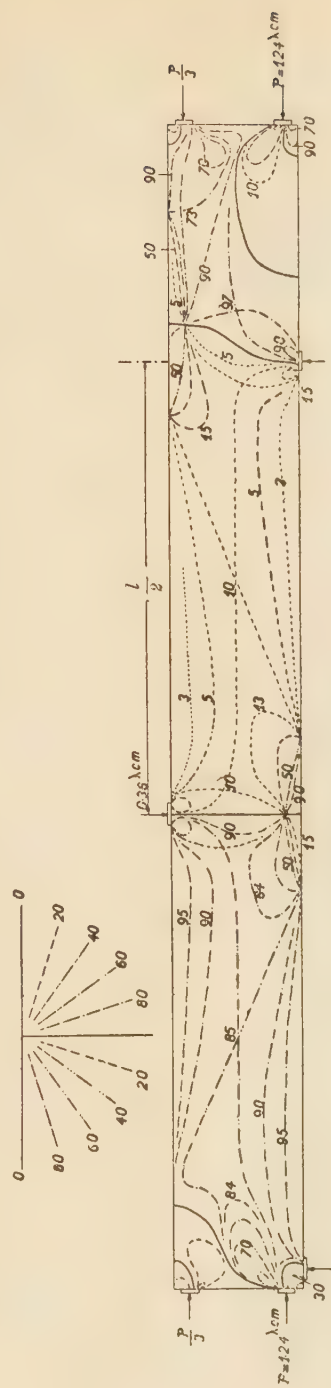
III-2.



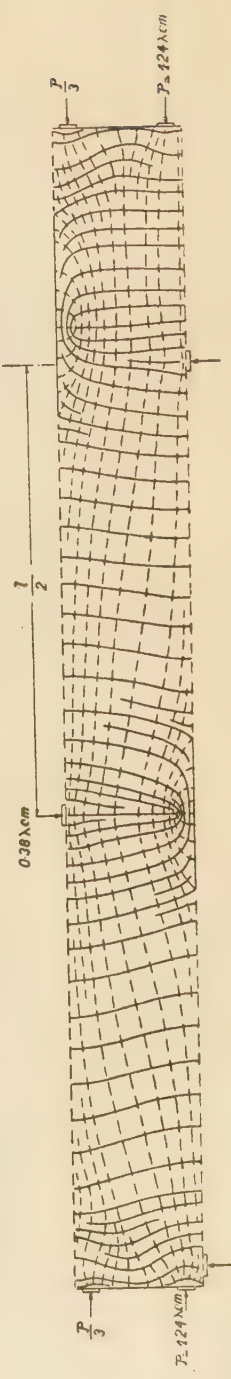
III-3.



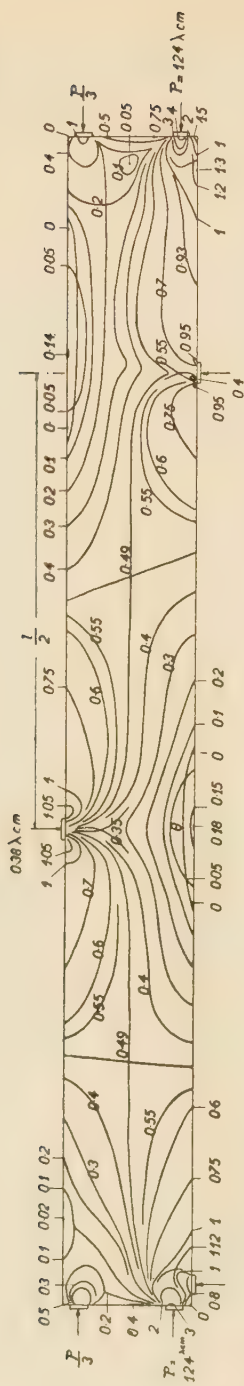
IV-1.



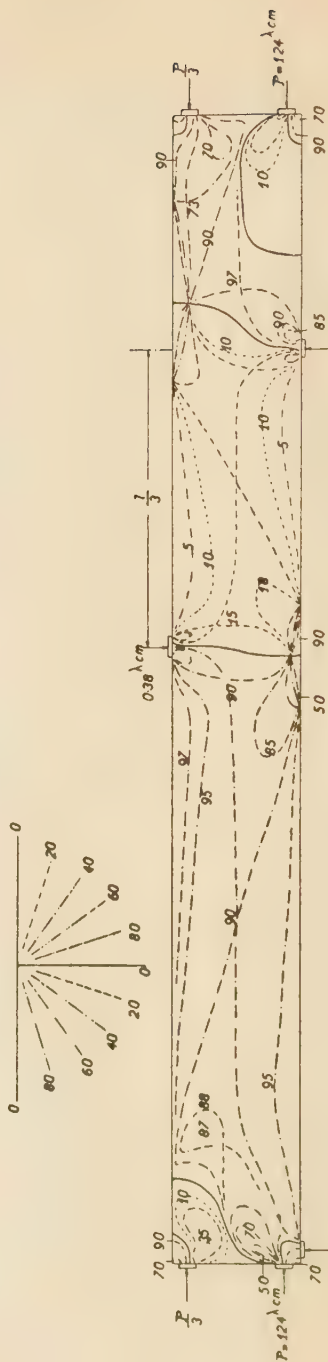
IV-2.



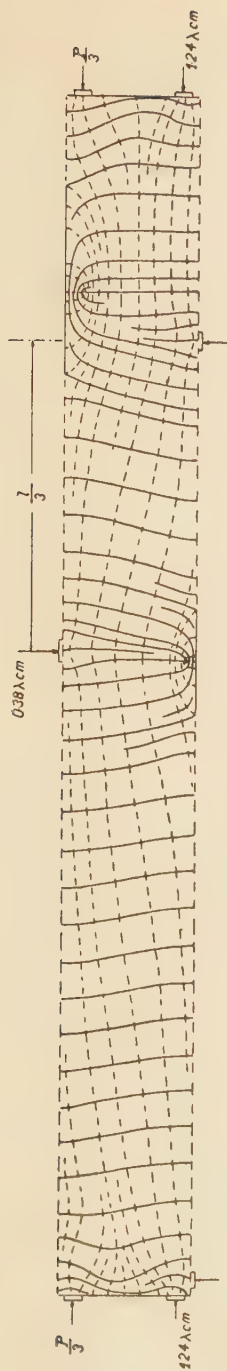
IV-3.



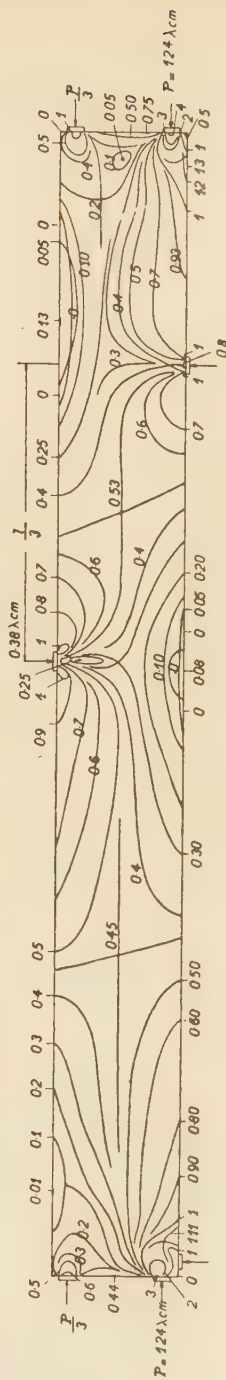
V-1.



V-2.



V-3.



BIBLIOGRAPHIE SUR LE « BÉTON TRAITÉ »

Congrès du Béton, Liège, 1930.

Annales des Ponts et Chaussées, III, 1932.

FREYSSINET (E.). — *Science et Industrie*, édition : Construction et Travaux Publics, janvier 1933, p. 3.

FREYSSINET (E.). — *Comptes Rendus des séances du Centre d'Etudes Supérieures de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, 100, rue du Cherche-Midi, Paris, n° 7, juillet 1934.

FREYSSINET (E.). — Progrès pratiques des méthodes de traitement mécanique des bétons. La reprise en sous-œuvre des fondations de la gare transatlantique du Havre. Edition : *Travaux de Science et Industrie*, juin 1935, p. 199.

FREYSSINET (E.). — Une révolution dans les techniques du béton. Librairie de l'Enseignement Technique, Paris, 1936.

PARIS (A.). — *Cours de Béton Armé*, I. Dunod, 1936, p. 73-78.

BIBLIOGRAPHIE SUR LA PHOTOÉLASTICIMÉTRIE

En langue française

MESNAGER (A.). — Contribution à l'étude de la déformation élastique des solides (*Annales des Ponts et Chaussées*, t. IV, 1901, p. 129).

MESNAGER (A.). — Détermination complète sur un modèle réduit des tensions qui se produiront dans un ouvrage (*Annales des Ponts et Chaussées*, t. XIV, 1913, IV, p. 133).

MESNAGER (A.). — La déformation des solides (*Congrès International des Méthodes d'essai des Matériaux de construction*, Paris, t. I, 1900, p. 149).

MESNAGER (A.). — La déformation des solides (*Congrès international de Physique*, t. I, 1900, p. 348).

MESNAGER (A.). — Mesure des efforts intérieurs (*Congrès de l'Association internationale pour l'essai des Matériaux*, Budapest, 1901).

MESNAGER (A.). — Tensions intérieures produites par deux forces égales directement opposées (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 décembre 1901, p. 1286).

MESNAGER (A.). — Utilisation de la double réfraction accidentelle (*Congrès de l'Association internationale pour l'essai des matériaux*, New-York, 1912).

MESNAGER (A.). — Sur une méthode pour déterminer à l'avance les tensions qui se produisent dans une construction (*Comptes rendus*, 25 novembre 1912, p. 1071).

MESNAGER (A.). — Les tensions intérieures rendues visibles (*Technique moderne*, 6 et 15 mars 1924).

- MESNAGER (A.). — Détermination expérimentale des efforts intérieurs dans les solides (*Mémoires des Sciences Physiques*, fasc. X, Gauthier-Villars, Paris, 1929).
- FAVRE (H.). — Méthode purement optique de détermination des tensions intérieures se produisant dans les constructions (*Schweizer Bauzeitung*, 1927, p. 291, 3 et 10 décembre).
- FAVRE (H.). — Sur une nouvelle méthode optique de détermination des tensions intérieures (*Revue d'Optique théorique et instrumentale*, Paris, 1929, p. 193, 241, 289).
- FAVRE (H.). — La détermination optique des tensions intérieures (*Editions de la revue d'optique théorique et instrumentale*, Paris, 1932).
- DELANGHE (G.). — La Photoélasticimétrie ; théorie, méthodes et applications (*Revue d'optique théorique et instrumentale*, juin-juillet 1928, et août 1928).
- DELANGHE (G.). — *Génie Civil*, 10, 17 et 24 septembre 1927.
- MARCOTTE (E.). — *Arts et Métiers*, février à mai 1927.
- TARDY (H.-L.). — Méthode pratique d'examen et de mesure de la biréfringence des verres d'optique (*Revue d'optique théorique et instrumentale*, février 1929, p. 59).
- TESAR (V.). — Détermination expérimentale des tensions dans les extrémités des pièces prismatiques munies d'une semi-articulation (*Mémoires de l'Association Intern. des Ponts et Charp.*, Zürich, I, 1932, p. 497).
- TESAR (V.). — *Revue d'optique théorique et instrumentale*, Paris, 1932, p. 97.
- TESAR (V.). — La photoélasticimétrie et ses applications dans les constructions aéronautiques (*La science aérienne*, sept-oct. 1933, p. 372).
- TESAR (V.). — Utilité pratique de la photoélasticimétrie dans les constructions aéronautiques (*La Technique aéronautique*, 3^e et 4^e trimestre 1934).
- TESAR (V.). — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXCH, p. 728, 23 mars 1931.
- TESAR (V.). — *Génie Civil*, 20 juin 1931.
- FABRY. — *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. CXC, 24 février 1930.
- HEYMANS. — Photoélasticimétrie (*Bulletin de la Société Belge des Ingénieurs et industriels*, t. II, n° 2, 1921, Bruxelles).
- COKER (E.-G.). — Des recherches récentes sur la photoélasticimétrie ayant rapport à son application dans les problèmes posés en construction (*Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civils de France*, juil.-sept., 1922).
- FRENKEL (P.). — Photoélasticimétrie et ses applications aux constructions civiles (*Edition : Travaux de Science et Industrie*, Paris, janvier, mars et avril 1935).
- BAES (L.). — La photo-élasticité (*Conférence du 22 novembre 1924*, Bruxelles, 1925).
- MAC GIVERN (I.-G.) et SUPPER (H.-L.). Complément à la théorie de la photo-élasticité. Utilisation d'une membrane en caoutchouc (*Le Génie Civil*, 18 novembre 1933, p. 495).
- SOUILLOT (H.). — La photoélasticimétrie. Méthode G. Mabboux dans l'étude des déformations des ouvrages en béton armé (*Edition : Travaux de Science et Industrie*, Paris, mai 1935, p. 157).

En langue allemande

- SEEBECK (A.). — Akzidentelle Doppelbrechung (*Schweigers Journal*, 1813 (XI) und 1814 (XII)).
- NEUMANN (F.). — Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in komprimierten oder ungleichmässig erwärmten unkristallinen Körpern (*Poggendorfs Annalen der Physik u. Chemie*, 1844, S. 449. Abhandlung d. Königlichen Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, 1841, S. 330).
- HÖNISBERG (O.). — Ueber die unmittelbare Beobachtung der Spannungsverteilung und Sichtbarmachung der neutralen Schicht an beanspruchten Körpern (*Z. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, 1904, S. 165).
- HÖNISBERG (O.). — Vereinfachtes Verfahren zur Sichtbarmachung der neutralen Schicht an beanspruchten Körpern (*Z. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, 1905, S. 578).
- SIEDENTOPF (H.). — Ueber die direkte Sichtbarmachung der neutralen Schichten an beanspruchten Körpern (*Z. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, 1906, S. 469).
- CARDINAL (H.) v. WIDDERN. — Polarisationsoptische Spannungsmessungen an Stabecken (*Dissertation, München*, 1928).
- SCHULZ (H.). — Die Bestimmung der Spannung in beanspruchten Körpern mit Hilfe polarisierten Lichtes (*Der Betrieb*, Bd. 3, (1921) S. 405).
- MESMER (G.). — Spannungsoptische Untersuchungen von ebenen Spannungszuständen (*Z. VDI.*, Bd. 72, 1928, S. 951).
- WAECHTLER (M.). — Ueber die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zum Studium der Spannungsverteilung in beanspruchten Körpern (*Physikal. Zeitschr.*, Bd. 29, 1928, S. 497).
- FÖPPL (L.). — Fortschritte auf dem Gebiete der spannungsoptischen Untersuchung von Konstruktionen (*Z. VDI.*, Bd. 76, 1932, S. 505).
- BAUD (R.-V.). — Technische Methoden photoelastischer Forschung (*Schweizerische Bauzeitung*, Bd. 100, 1932, S. 1).
- FÖPPL (L.). — Untersuchung ebener Spannungszustände mit Hilfe der Doppelbrechung (*Sitzungsbericht d. Bayer. Akad. d. Wissenschaften*, 10. Nov. 1928).
- LEHR (E.). — Spannungsverteilung in Konstruktionselementen (*VDI.*, 1934, Berlin).
- KÖNIG. — Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung (*Annalen der Physik*, 1903, p. 842.)
- KÖNIG. — Doppelbrechung in transversal schwingenden Platten (*Annalen der Physik*, IV, 1901, p. 1).

En langue anglaise

- COKER (E.-G.). — The determination by photo-elastic methods of the distribution of stress in plates of variable section, with some applications to ships plating (*Engineering*, April 21 and April 28, 1911).
- COKER (E.-G.). — The optical determination of stress (*Philosophical Magazine* X, 1910, p. 740).
- COKER (E.-G.). — Photo-Elasticity (*Engineering*, January 6, 1911).

- COKER (E.-G.). — Photo-Elasticity Methods and the distributions of stress (*Engineering*, April 21, 1911).
- COKER (E.-G.). — Photo-Elasticity for engineers (*General Electric Review*, 1920, 23, pp. 870, 966 ; 1921, 24, pp. 82, 222, 455).
- COKER (E.-G.) et FILON (L. N. G.). — A treatise on photo-elasticity (*At the University Press Cambridge*, 1931).
- COKER (E.-G.), FILON (L. N. G.). — Experimental determination of the distribution of stress and strain solids (*British Assoc.*, 1914, p. 201).
- COKER (E.-G.), CHAKKO (K.-C.), SATAKE (Y.). — Photo-elastic and strain measurements of the effects of circular holes on the distribution of stress in tension members (*Engineering*, 1920, 109, I, p. 259).
- COKER (E.-G.). — Photo-elastic measurements of the stress distribution in tension members used in the testing materials (*Minutes of the Proc. Inst. Civil Eng.*, London 1921).
- COKER (E.-G.). — The effect of holes and semi-circular notches on the distribution of stress in tension members (*Proc. Phys. Soc. of London*, 1913, 25, p. 95).
- COKER (E.-G.). — The optical analysis of stresses in rollers, cams and wheels (*Proc. of the Inst. of Mech. Eng.*, 1931. *Engineering*, 1931, 131, p. 116).
- COKER (E.-G.). — The determination of the stresses in springs and other bodies by optical and electrical methods (*Engineering*, sept. 20, 1912).
- COKER (E.-G.). — The distribution of stress at the minimum section of a cement briquette (*Engineering*, 13-XII, 1912).
- COKER (E.-G.). — The determination of stresses at a point in a plate. A comparison of experimental methods of obtaining the stress at a point in a plate by optical and mechanical methods (*Engineering*, 19-X-1923).
- COKER (E.-G.), KIMBALL (A.-L.). — The effects of holes, cracks and other discontinuities in ship plating (*Engineering*, June 18, 1920).
- COKER (E.-G.), HEYMANS (P.). — Stress concentrations due to Notches and like discontinuities (*Engineering*, jan. 6-1922).
- COKER (E.-G.), CHAKKO (K.-C.). — Optical stress analysis (*Engineering*, 25-II-1916).
- COKER (E.-G.). — Photo-elastic measurements (*The institution of Civil Engineers*, 1918-19, II).
- COKER (E.-G.), THOMPSON (S.-P.). — *Engineering*, 16-VI-1911.
- COKER (E.-G.). — *Engineering*, 12-V-1911.
- COKER (E.-G.), SCOBLE (W.-A.). — The distribution of stress due to a rivet in a plate (*Trans. of the Inst. of Naval Arch.*, 1913, Teil I, p. 207, 231).
- TUZI (Z.). — Photographic and kinematographic study of photo-elasticity (*Scient. Papers of the Inst. of Phys. and Chem. Research*, N^o. 149, Tokyo, 1928).
- TUZI (Z.). — Of the development of the experimental methods in photo-elasticity (*Scient. Papers of the Inst. of Phys. and Chem. Research*, p. 21, Tokyo, 1929).
- FILON (L.-N.-G.). — On the graphical determination of stress from photo-elastic observations (*Engineering*, 19-X-1923, p. 511. *British Association, Rep.*, 1923, p. 350).
- WILSON (Carus). — The influence of surface loading in the flexure of beams (*Philosophical Magazine*, XII, 1891, p. 481).
- HÖNISBERG. — Photo-elasticity (*Engineering*, 17-III-1911, p. 345).
- TUZI (Z.). — A new material for the Study of photo-elasticity, Tokyo, 1927,

volume 7 des publications scientifiques de l'Institut de recherches physiques et chimiques.

- FROCHT (M.-M.). — Recent advances in photo-elasticity (*Trans of the A. S. M. E., Applied Mechanics*, 9-XII 1931, p. 135).
- FROCHT (M.-M.). — Kinematography in photo-elasticity (*Trans. of the A. S. M. E., Applied Mechanics*, 15-VI-1932, p. 83).
- SOLAKIAN (A.-G.), KARELITZ (G.-B.). — Photo-elastic study of shearing stresses in keys and keyways (*Trans. of the A. S. M. E., Applied Mechanics*, 1932, p. 97).
- HEYMANS (P.), KIMBALL (A.-L.). — Stress distribution in electric railway motor pinions as determined by photo-elastic method (*General Electric Review*, 1923, 26, p. 143. *Trans. A. S. M. E.*, 44, 1922, p. 513).
- KIMBALL (A.-L.). — Photo-elasticity and its application to gear wheels (*American Machinist*, 63, pp. 7, 51, 1925).
- TUZI (Z.). — Effect of a circular hole on the stress distribution of a beam under uniform bending (*Philosophical Magazine*, 9-VII-1930, p. 210).

En langue espagnole

- BUICH (R.). — La investigación de las tensiones elásticas mediante la luz polarizada (*Editado por la Facultad de Ciencias E. F. y N.*, Buenos Aires, 1929).
- DURELLI (A.-J.). — Método para la medida de la birrefringencia accidental (*Revista del Centro E. de Ingeniería*, nº 391, y 392, 1935).
- DURELLI (A.-J.). — Cálculo de las tensiones principales por integración (*Revista del C. E. Ingeniería*, enero, 1936).
- GARCÍA OLANO (F.), GALLONI (E.-E.). — Contacto de cuerpos elásticos (*Revista del C. E. Ingeniería*, nº 389, p. 139, 1935).

En langue italienne

- COLONNETTI (G.). — Ricerche sperimentale sulle coazioni elastiche (*Ingegneria*, Maggio, 1926).
- PUGNO (G.-M.). — La determinazione degli sforzi e della loro distribuzione nei solidi mediante la luce polarizzata. I (*Ingegneria*, Luglio, 1925).
- PUGNO (G.-M.). — Id. II. *Ingegneria*. Marzo, 1926.
- PUGNO (G.-M.). — Id. III. Teoria del compensatore (*Ingegneria*, Luglio, 1926).
- PUGNO (G.-M.). — Id. IV. Applicazione al caso del gancio (*Ingegneria*. Gennaio, 1927).
- PUGNO (G.-M.). — Id. V. Sulla distribuzione delle tensione nell'interno di una lastra (*Ingegneria*, Giugno, 1927).
- PUGNO (G.-M.). — Notizie sul metodo ottico delle luce polarizzata per la ricerca delle tensione interne nei solidi.
- PUGNO (G.-M.). — Studio dei compensatori in uso nelle sperienze ottiche sulle Elasticità.
- DANUSSO (A.), OBERTI (G.). — Indagini sperimentali sulle costruzioni, *La Foto-elasticità*, Milano 1932.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

LA PIÈCE EN BÉTON TRAITÉ

AVANT-PROPOS.....	1
SOMMAIRE	2
Terminologie et notations employées.....	5
I. — Généralités sur le béton « traité ». Objet de l'étude présente.....	9
II. — Equations pour obtenir le P maximum compatible avec la résistance des matériaux	15
1. Condition A. — $P = f(m, \sigma'_{ad})$	16
2. Condition B. — $P = f(m, \sigma_{ad})$	16
3. Condition C. — $P = f(m, \sigma'_{ad}, \sigma_{ad})$	18
4. Condition D. — $P = f(\sigma_{ead}, \sigma'_{ad})$	21
5. Condition E. — $P = f(\sigma_{ead}, \sigma_{ad})$	22
6. Représentation graphique de A, B, C, D, et E. — Points d'intersections V et T	24
III. — Equations pour obtenir m_1	29
1. Condition F — $m_1 = f(P, \sigma_{ead}, \sigma'_{ad})$	29
2. Condition G — $m_1 = f(P, \sigma_{ead}, \sigma_{ad})$	31
IV . — Etude d'un cas particulier.....	33
1. Formules qui expriment les conditions A, B, C, D et E.....	34
2. Id., F et G	36
3. Calcul du prix de revient	39
4. Exemple de la marche à suivre pour le calcul de $\frac{S}{\pi R}$	40
5. Explication des tableaux et des graphiques.....	42
V. — Généralisation des résultats numériques du cas particulier.....	52
VI. — Calcul des effets produits par les efforts tranchants.....	54

DEUXIÈME PARTIE

ESSAI PHOTOÉLASTICIMÉTRIQUE

VII. — Rappel de quelques notions générales.....	57
VIII. — Différentes parties de la méthode photoélasticimétrique.....	59
IX. — Description de l'appareil employé.....	61
X. — Méthode employée pour la mesure de la biréfringence accidentelle.....	63
XI. — L'intégration graphique pour le calcul des valeurs individuelles σ_1 et σ_2	71
XII. — Essai du modèle.....	80

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

THÉORIE ET APPLICATIONS DE LA COURBE DE RÉSISTANCE INTRINSÈQUE

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 15 Juillet 1936.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

Saint-Amand (Cher), France. — Imprimerie R. BUSSIÈRE. — 22-7-1936.
